M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 22. září 2023.

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 25. a 26. 9. 2023.

Příklad 2.1: Nechť $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s.

Příklad 2.2: Nechť $S = 72\,cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu r.

Příklad 2.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2 \log x + 3{,}5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k\ :\ 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Příklad 2.10: Pro n-tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$\begin{aligned} G(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}, \\ H(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.