

## M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 22. září 2023.

### 2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 25. a 26. 9. 2023.

**Příklad 2.1:** Necht'  $T = [r, s]$  je těžiště  $\triangle ABC$ , kde  $A = [2, -1]$ ,  $B = [-1, 3]$  a  $C = [5, 7]$ . Určete hodnoty  $r$  a  $s$ .

*Řešení:*  $r = 2, s = 3$ .

**Příklad 2.2:** Necht'  $S = 72 \text{ cm}^2$  je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru  $r$ . Určete hodnotu  $r$ .

*Řešení:*  $k = 15$ .

**Příklad 2.3:** Necht'  $M$  je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici  $|2x+1| < x+3$ . Určete množinu  $M$ .

*Řešení:*  $M = (-\frac{4}{3}, 2)$ .

**Příklad 2.4:** Komplexní číslo  $z$  je řešením rovnice  $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$ . Určete komplexní číslo  $z^2$ .

*Řešení:*  $z^2 = -7 + 24i$ .

**Příklad 2.5:** Čísla  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , jsou řešením rovnice  $x^{2 \log x + 3,5} = 100\sqrt{x}$ . Určete číslo  $k = ab^2$ .

*Řešení:*  $k = \frac{1}{10}$ .

**Příklad 2.6:** Necht' číslo  $c$  je součtem všech řešení rovnice  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$  v intervalu  $[0, 2\pi]$ . Určete hodnotu  $c$ .

*Řešení:*  $c = \frac{\pi}{4}$  (jediné řešení v daném intervalu).

**Příklad 2.7:** Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

*Řešení:*  $8 \cdot 9^3 \cdot 4$ .

**Příklad 2.8:** Necht'  $c = a^2 + b^2$ , kde  $a$  a  $b$  jsou délky poloos kuželosečky  $k$  o rovnici  $k : 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$ . Určete hodnotu  $c$ .

*Řešení:*  $c = 8$ .

**Příklad 2.9:** Definujte, co je to aritmetický průměr  $n$ -tice reálných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

*Řešení: Průměr:  $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ . Za dodatečného předpokladu  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  je medián roven  $\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}$  pro liché (nepárne)  $n$ , resp.  $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$  pro sudé (párne)  $n$ . Pro čtveřici 1,1,1,5 je medián 1 a průměr 2. Pro čtveřici 1,5,5,5 je medián 5 a průměr 4.*

**Příklad 2.10:** Pro  $n$ -tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla  $a_1, a_2$  platí  $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$ . Pro která  $a_1, a_2$  nastane rovnost? ( $A$  značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

*Řešení: V platné nerovnosti  $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$  přičteme (kladné číslo)  $4a_1a_2$  k oběma stranám a dostaneme  $(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2$ . Po odmocnění (opět se využije, že jsou obě  $a_1$  i  $a_2$  kladná čísla) a dělením dvěma dostaneme nerovnost  $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2)$ . Pokud v této nerovnosti dosadíme  $a_1 = \frac{1}{b_1}$  a  $a_2 = \frac{1}{b_2}$ , potom po dělení oběma stranami dostaneme  $G(b_1, b_2) \geq H(b_1, b_2)$ . Z postupu je jasné, že pro  $a_1 \neq a_2$  lze psát nerovnosti ostré. Rovnost tedy nastává právě pro dvojice  $a_1 = a_2$ , kdy  $A(a_1, a_2) = G(a_1, a_2) = H(a_1, a_2) = a_1$ .*

**Příklad 2.11\*:** Jaká je průměrná rychlost auta, které jede  $n$  stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ?

*Řešení:  $H(v_1, v_2, \dots, v_n)$*

**Příklad 2.12\*:** Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny  $n$ -tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti  $A \geq G$  plyne nerovnost  $G \geq H$ . Zkuste dokázat nerovnost  $A \geq G$ .

*Řešení: To, že z nerovnosti  $A \geq G$  plyne nerovnost  $G \geq H$  lze ukázat stejně jako v řešení příkladu 2.10. Elementárně lze nerovnost  $A \geq G$  dokazovat indukcí, kde pro  $n = 2$  jsme již provedli v příkladě 2.10. Indukční krok je poměrně jednoduchý pro  $n = 2k$ , kdy se sečtou nerovnosti  $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) = b_1$ ,  $A(a_3, a_4) \geq G(a_3, a_4) = b_2$ ,  $\dots$ ,  $A(a_{n-1}, a_n) \geq G(a_{n-1}, a_n) = b_k$ , a potom se použije nerovnost  $A(b_1, b_2, \dots, b_k) \geq G(b_1, \dots, b_k)$ . Z nerovnosti pro  $n = 2k$  (kde jsme využili indukční předpoklad pro 2 a  $k$ ), lze volbou  $a_{2k} = A(a_1, \dots, a_{2k-1})$  dokázat nerovnost pro  $2k - 1$ . (Poznamenejme, že s jistými znalostmi z matematické analýzy lze dostat nerovnost také takto:  $e^x$  je konvexní funkce na intervalu  $(0, \infty)$ , proto platí (Jensenova) nerovnost  $e^{\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ , kde levá strana lze psát jako  $\sqrt[n]{e^{x_1} \cdot \dots \cdot e^{x_n}}$ . Po substituci  $e^{x_i} = a_i$  dostaneme požadovanou nerovnost.)*