M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 5. října 2023.

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 2. a 3. 10. 2023.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B. O zobrazení do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot zadaných funkcí. Dále načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru) a zda je rostoucí, resp. klesající.

1. $f(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = |3x + 1| - x$,
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,
4. $f(x) = x^2 + 2x + 3$,
5. $f(x) = \log_{10}(x + 2)$,
6. $f(x) = 2^{x-3}$,
7. $f(x) = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$,
8. $f(x) = 3\cos x$,
9. $f(x) = \tan(-x)$.

Řešení: 1) $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní a rostoucí. 2) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{1}{3}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 3) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 4) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [2, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 5) $D(f) = (-2, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní, rostoucí. 6) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$, injektivní, není surjektivní, rostoucí. 7) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{9}{2}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 8) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [-3, 3]$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 9) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$, není injektivní, je surjektivní, není rostoucí, není klesající.

Příklad 3.2: Funkce f je dána následujícím předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2 - 1) - 1}\,.$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot.

Řešení: $D(f) = (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{11}, -1) \cup (1, \sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

1. $y = 2f(x)$,
2. $y = \frac{1}{3} \cdot f(x)$,
3. $y = -f(x)$,
4. $y = f(-x)$,
5. $y = f(x + 3)$,
6. $y = f(x - 2)$,
7. $y = f(x) - 4$,
8. $y = f(x) + 6$,
9. $y = f(3x)$,
10. $y = f(\frac{x}{2})$.

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Řešení: 1) Graf se „roztáhne na dvojnásobek“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 2) Graf se „smrskne na třetinu“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 3) Graf je zrcadlově převrácený podle osy y. Bude klesající. 4) Graf je zrcadlově převrácený podle osy x. Bude klesající. 5) Graf je posunutý ve směru osy x o 3 doleva. Bude rostoucí. 6) Graf je posunutý ve směru osy x o 2 doprava. Bude rostoucí. 7) Graf je posunutý ve směru osy y o 4 dolů. Bude rostoucí. 8) Graf je posunutý ve směru osy y o 6 nahoru. Bude rostoucí. 9) Graf se „smrskne“ ve směru osy x v poměru 1:3. Bude rostoucí. 10) Graf se „roztáhne“ ve směru osy x v poměru 2:1. Bude rostoucí.

Příklad 3.4: S využitím úlohy 3.3 rozložte následující funkce jako složení "jednodušších" funkcí.

1. $f(x) = |3x - 8| + 2$,
2. $g(x) = \frac{3}{x+5} + 2$,
3. $h(x) = \log_{10}(2x + 3) - 5$.

Nakreslete grafy těchto funkcí. Rozhodněte, zda jsou funkce rostoucí, resp. klesající, případně dejte příklad vhodných intervalů, na kterých je funkce rostoucí, resp. klesající.

Řešení: 1) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, *kde* $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = x - 8$, $f_3(x) = |x|$, $f_4(x) = x + 2$. *Funkce* f *je rostoucí na intervalu* $[\frac{8}{3}, \infty)$ *a klesající na intervalu* $(-\infty, \frac{8}{3}]$. *2)* $g = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, *kde* $g_1(x) = x + 5$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = 3x$, $g_4(x) = x + 2$. *Funkce* g *je klasající na intervalech* $(-\infty, -5)$ *a* $(-5, \infty)$. *3)* $h = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, *kde* $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = x + 3$, $h_3(x) = \log_{10}(x)$, $h_4(x) = x - 5$. *Funkce* h *je rostoucí na celém definičním oboru* $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Příklad 3.5: Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H(f) = (0, \pi/2)$ a předpokládejme, že $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru.

a) Dokažte, že pak funkce $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru.

b) Rozhodněte o chování funkce $g(x) = \frac{\cos(x-\pi/2)}{f(x)}$ na intervalu $(0, \pi/2)$. Možné odpovědi jsou, že funkce $g(x)$ je na tomto intervalu buď rostoucí nebo klesající nebo se takto chová jen na části daného intervalu nebo monotonie závisí na volbě funkce $f(x)$. Odpověď je vždy třeba dokázat.

Řešení: a) Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *taková že* $x_1 < x_2$, *máme* $f(x_1) > f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *je klesající funkce na celém definičním oboru* $\mathbb{R}$*), z čehož vyplývá, že* $\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$ *(neboť* $\cos x$ *je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *klesající). b) Označme* $h(x) = \cos(x - \pi/2)$, *což je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *funkce rostoucí a kladná; pak pro* $x_1 < x_2$ *z nerovností* $h(x_1) < h(x_2)$ *a* $f(x_1) > f(x_2)$ *dostaneme* $h(x_1)f(x_2) < h(x_2)f(x_1)$ *a odtud* $h(x_1)/f(x_1) < h(x_2)f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *nabývá pouze kladných hodnoty). Tedy* $\cos(x - \pi/2)/f(x)$ *je rostoucí funkce na* $(0, \pi/2)$.