M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 10. listopadu 2023.

8 Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 6. a 7. 11. 2023.

Příklad 8.1: Albert popletl pořadí kvantifikátorů v definici spojitosti. Podle Alberta je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v x_0, jestliže platí

$$\exists \delta > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Napište negaci tohoto definičního výroku a zjistěte, zda jsou následující funkce podle Alberta spojité v bodě $x_0 = 3$:

1. $f(x) = x$,
2. $f(x) = -1$ pro $x < 0$ a $f(x) = 2$ pro $x \geq 0$.

Najděte všechny funkce, které jsou podle Alberta v bodě $x_0 = 3$ spojité.

Příklad 8.2: Mocniny a exponenciální funkce a^x.

1. Pro $a > 0$ a $n \in \mathbb{Z}$ definujte a^n.
2. Je-li $a > 1$ reálné číslo a $n < m$ celá čísla, pak $a^n < a^m$. Dokažte.
3. Pro $a > 0$ reálné a $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definujte a^x.
4.* Pro $a > 0$ reálné a x, y racionální, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. Pro $a > 1$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$. Udělejte totéž pro $a \in (0, 1)$.
6.* Dokažte, že funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.
7.* Pro $a > 0$ reálné a x, y reálná, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.
8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá a.

Řešení: Většina podpříkladů je značně náročná. Rozhodně příklad přesahuje požadavky k ukončení tohoto předmětu, a proto nebude tento typ příkladu v písemkách.

Příklad 8.3: Logaritmická funkce $\log_a x$.

1. Definujte inverzní funkci k funkci f.
2. Definujte $\log_a x$ jako inverzní funkci k exponenciální funkci a^x.
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

Příklad 8.4: Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.
7. $\log_{a^y} x^y = \log_a x$.

Doplňte vždy chybějící předpoklady na použité parametry a, b, c, x, y.

Řešení: 1) Předpoklady: $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a(xy) = \log_a(a^k \cdot a^\ell) = \log_a(a^{k+\ell}) = k+\ell = \log_a x + \log_a y$. *Jde tedy o přímý důsledek prvního vztahu z 8.1.-7). 2) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(\frac{a^k}{a^\ell}) = \log_a(a^{k-\ell}) = k - \ell = \log_a x - \log_a y$. *3) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in (0,\infty)$ $y \in \mathbb{R}$. *Důkaz: Označme* $k \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x$. *Potom* $\log_a(x^y) = \log_a((a^k)^y) = \log_a(a^{yk}) = yk = y \log_a x$. *Jde tedy o přímý důsledek druhého vztahu z 8.1.-7). 4) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, b^\ell = a$. *Potom* $\log_b x = \log_b(a^k) = \log_b((b^\ell)^k) = \log_b(b^{k\ell}) = k \cdot \ell = \log_a x \cdot \log_b a$. *Podělením* $\log_b a = \ell \neq 0$ *(uvědomte si, že* $\log_b a = 0$ *by znamenalo* $a = 1$*) dostáváme požadované. 5) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$. *Důkaz: Stačí v předchozím zvolit* $x = b$. *6) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $b, c \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = b, a^\ell = c$. *Potom* $b^{\log_a c} = b^\ell = (a^k)^\ell = (a^\ell)^k = c^k = c^{\log_a b}$. *7) Předpoklady:* $a, y \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Podle 4)* $\log_{a^y} x^y = \frac{\log_a x^y}{\log_a a^y}$, *což se s využitím 3) dále rovná* $\frac{y \cdot \log_a x}{y} = \log_a x$.

Příklad 8.5: Určete

1. $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$.
2. $\log\left(\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$.
3. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.
4. $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.
5. $3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$.
6. $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$.
7. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$.

Řešení: 1) $\frac{49}{25}$. *2)* -1. *3)* 625. *4)* 0. *5)* 20. *6)* $-\log_3 2$. *7)* 24.