Výsledek: Jméno:

1. (a) **(0,8 b.)** Rozhodněte, zda následující řada konverguje absolutně/relativně, nebo zda diverguje
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n - 1)}{(n^2+7)^3}.$$
   (b) **(0,8 b.)** Nalezněte poloměr konvergence R a obor konvergence I pro řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} n}\right)^n x^n.$$

2. Vyřešte následující úkoly.
   (a) **(0,2 b.)** Nalezněte posloupnost funkcí a interval I, pro které můžete říci, že řada $\sum^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Svá tvrzení zdůvodněte.
   (b) **(0,2 b.)** Zformulujte větu pro odhad chyby součtu řady, o jejímž chování lze rozhodnout pomocí podílového kritéria.

1a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(2^n-1)|}{(n^2+7)^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+7)^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

řada absolutních hodnot konverguje, tedy původní řada konverguje absolutně

1b

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = L \Rightarrow R = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} n}\right)^n$$

alternující řada

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} n}\right)^n = ?$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \frac{\pi}{2\operatorname{arctg} n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\pi}{2\operatorname{arctg} n}}{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{2}{\pi}} \ne 0$$

$= *$

není splněna NPK!!

$$\circledast = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\operatorname{arctg} n}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2(\operatorname{arctg} n)^2}\right)\cdot\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{1+n^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\operatorname{arctg} n}_{=\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

Stejnou limitu dostaneme také pro $x=\frac{\pi}{2}$ **a tedy v obou krajních bodech řada diverguje**

$$I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

2a **Chceme použít Weiestrassovu větu, tj. hledáme** a_n, kde

$$|f_n(x)|\leq a_n,\ \forall x\in I,\ \sum^{\infty} a_n<\infty$$

VOLÍME NAPŘ. $f_n(x)=\frac{1}{n^2}$ na $\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\frac{x}{n^2} \text{ na } [0,1]$$

$$f_n(x)=e^{nx} \text{ na } [-2,-1]$$

2b NECHŤ $\sum^{\infty} a_n$ SPLŇUJE $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q<1$

PRO $\forall n$ A NĚJAKÉ q, POTOM

$$|R_n|\leq|a_n|\cdot\frac{q}{1-q}$$