Výsledek: Jméno:

1. (a) **(0,8 b.)** Pro $|x| < 1$ sečtěte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$$

   (b) **(0,8 b.)** Rozhodněte, zda následující řada konverguje absolutně/relativně, nebo zda diverguje
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^4-2}-\sqrt{n}}{n^3}$$

2. Vyřešte následující úkoly.

   (a) **(0,2 b.)** Nalezněte posloupnost funkcí a interval I, pro které můžete říci, že funkce $f_n(x)$ konvergují stejnoměrně na I. Svá tvrzení zdůvodněte.

   (b) **(0,2 b.)** Zformulujte celou větu pro odhad chyby součtu alternující řady.

1a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x} \quad /(\ )'$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2} \quad /:x$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \quad /(\ )'$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)n x^{n-1} = \frac{(3-4x)(1-x)^2+2(3x-2x^2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(3-3x-4x+4x^2)+6x-4x^2}{(1-x)^3} =$$
$$= \frac{3-x}{(1-x)^3} \quad /\cdot x$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)n x^{n} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

1b) **Všimneme si, že eventuelně máme řadu nezáporných hodnot, viz**

$\sqrt[3]{3n^4-2} \geq n \geq \sqrt{n}$ PRO VŠECHNA n, TJ.

$$\sqrt[3]{3n^4-2}-\sqrt{n} \geq 0$$

Celkově tak vidíme, že pokud řada konverguje, tak konverguje absolutně, jinak diverguje. Toto pozorování bychom měli učinit i pokud bychom přidali absolutní hodnoty.

Nyní pomocí limitního sorvnávacího kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}\left(\sqrt[3]{3n^4-2}-\sqrt{n}\right)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}\sqrt[3]{3}\, n^{\frac{4}{3}}}{n^3} = \sqrt[3]{3} \quad \text{PRO}$$

$$\alpha + \frac{4}{3} - 3 = 0$$

$$\alpha = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} > 1$$

Řada konverguje, a proto konverguje absolutně.

(2a) **Hledáme funkce, které jsou od jistého n uvavřeny v epsilonovém pásu okolo své limity. Máme např.**

- Z PŘEDNÁŠKY $f_n = x^n$ na $[0, \frac{1}{2}]$
- $f_n(x) = C$ na $\mathbb{R}$
- $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$ na $[0,1]$
- $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$, KDE $g_k(x) = \frac{x}{k^2}$ na $[-1,1]$
  DLE W. KRIT.

(2b) MĚJME $\sum^{\infty} (-1)^n a_n$, KDE $a_n \geq 0$, a_n NEROSTOUCÍ, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. POTOM

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$