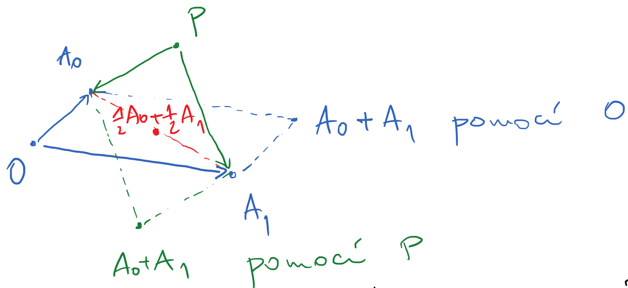
1 Cv. Ukažte, že definice kombinace bodů

$$t^0 A_0 + \cdots + t^n A_n \overset{\text{def}}{=} O + t^0(A_0 - O) + \cdots + t^n(A_n - O)$$

nezávisí na volbě bodu O, právě když $t^0 + \cdots + t^n = 1$.



Řešení. Přepíšeme výraz pro P pomocí O:

$$P + t^0(A_0 - P) + \cdots + t^n(A_n - P)$$

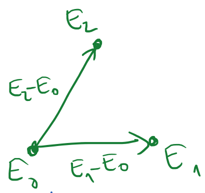
$$= O + (P - O) + t^0(A_0 - O + O - P) + \cdots + t^n(A_n - O + O - P)$$

$$= \underbrace{O + t^0(A_0 - O) + \cdots + t^n(A_n - O)}_{\text{výraz pro } O} + \underbrace{(1 - t^0 - \cdots - t^n)\cdot(P - O)}_{\text{musí být vždy nulový vektor}}$$

pomíname případ A má 0/1 bod

$\Rightarrow$ pro $O \neq P$ musí být $t^0 + \cdots + t^n = 1$

2 Cv. Ukažte, že $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ je bodová báze, právě když $(E_0, E_1 - E_0, \dots, E_n - E_0)$ je afinní báze.



$(E_0, E_1, \dots, E_n)$ bodová báze $\iff \forall A : \exists! \, (t^0, t^1, \dots, t^n)$ t. ž. $t^0 + t^1 + \dots + t^n = 1$, $A = t^0 E_0 + t^1 E_1 + \dots + t^n E_n$

$(E_0, e_1, \dots, e_n)$ afinní báze $\iff \forall A : \exists! \, (t^1, \dots, t^n)$ t. ž. $A = E_0 + t^1 e_1 + \dots + t^n e_n$

Řešení. Plyne z definice afinní kombinace

$$A = t^0 E_0 + t^1 E_1 + \dots + t^n E_n \quad (A) \quad / \text{ zvolíme počátek } E_0$$

$$= E_0 + t^0 (E_0 - E_0) + t^1 (E_1 - E_0) + \dots + t^n (E_n - E_0)$$

$$= E_0 + t^1 (E_1 - E_0) + \dots + t^n (E_n - E_0) \quad (B)$$

$\rightsquigarrow$ $t^0, t^1, \dots, t^n$ s vlastností $t^0 + t^1 + \dots + t^n = 1$ ex. jedn. v (A)
$\iff$ $t^1, \dots, t^n$ ex. jedn. v (B) $\quad (t^0 = 1 - t^1 - \dots - t^n)$

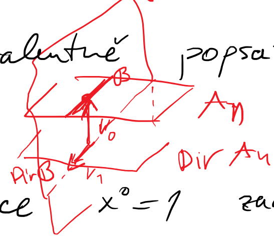
3 Cv. Nechť $\mathcal{B} \subseteq A_n$ je afinní podprostor. Najděte vektorový podprostor $\hat{\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{k}^{n+1}$ t.ž. $\mathcal{B} \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ je nadrovina neprocházející počátkem. Pro $\mathcal{B} : A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = b$, $x^0 = 1$ popište i podprostor $\hat{\mathcal{B}}$ implicitně.

$A_n \subseteq \mathbb{k}^{n+1}$, $x^0 = 1$

(Je celkem jasné, že $\hat{\mathcal{B}} = [\mathcal{B}] = \operatorname{span} \mathcal{B}$ – nejmenší možný, stačí ověřit dim.)

Řešení. Pokud $\mathcal{B} = \overset{A_n}{\underset{\Downarrow}{}} V_0 + \overset{\mathrm{Dir}\, A_n}{\underset{\cup}{}}[v_1, \dots, v_k]$, pak $\operatorname{span} \mathcal{B} = [V_0, v_1, \dots, v_k]$ je tímto vektorovým podprostorem ($V_0 \notin \mathrm{Dir}\, A_n \supseteq [v_1, \dots, v_k]$, takže má dimenzi vskutku $k+1 = \dim \mathcal{B} + 1$.)

Afinní podprostor $\mathcal{B} : A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = b$, $x^0 = 1$ lze ekvivalentně popsat jako



$$\mathcal{B} : \underbrace{A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = b x^0}_{\text{vektorový podprostor}}, \quad x^0 = 1$$

vektorový podprostor, v němž rovnice $x^0 = 1$ zadává afinní nadrovinu $\Rightarrow$ je to $\hat{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow$ soustava pro $\hat{\mathcal{B}}$ vznikne tzv. „homogenizací"
- $x^i \rightsquigarrow \frac{x^i}{x^0}$
- vynásobení x^0

(jiná než známe z dřívějška)

Pozn. $(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \mathcal{B} \iff$ je to vlastní bod, tj. $x^0 \neq 0$ a pak odpovídá bodu afinního prostoru

$$(x^0 : x^1 : \dots : x^n) = \left(1 : \frac{x^1}{x^0} : \dots : \frac{x^n}{x^0}\right) = \left(1, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}\right),$$

a tento splňuje soustava zadávající $\mathcal{B}$:

$$A\begin{pmatrix} x^1/x^0 \\ \vdots \\ x^n/x^0 \end{pmatrix} = b \qquad / \cdot x^0$$

$$\overset{x^0 \neq 0}{\iff} \quad A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = b x^0$$

$\Rightarrow$ $(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \mathcal{B} \iff x^0 \neq 0$ a splňuje homogenizovanou soustavu

$(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \overline{\mathcal{B}} \iff$ splňuje homogenizovanou soustavu

$\overline{\mathcal{B}} = P(\hat{\mathcal{B}})$

$\rightsquigarrow$ body navíc, tj. body $\overline{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B} = \nu(\mathcal{B}) = P(\mathrm{Dir}\, \mathcal{B})$, jsou řešení homogenizované soustavy s $x^0 = 0$, tj.

$$\underbrace{A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0}_{\substack{\text{homogenní soustava odpovídající} \\ \text{původní soustavě... dvě homogenizace}}}, \quad x^0 = 0$$

4 **Cv.** Dokažte, že afinní zobrazení

$\varphi: A_n \to A_m$

jednoznačně odpovídají lineárním zobrazením

$\psi: \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$

splňujícím $\psi(A_n) \subseteq A_m$

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\varphi = \psi|_{A_n}} & A_m \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{K}^{n+1} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{K}^{m+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dir}\,\varphi(v) & & \psi(v) \\ \| & & \| \\ & & \psi(0+v) - \psi(0) \\ & & \| \\ \mathrm{Dir}\,\varphi((0+v)-0) & = & \varphi(0+v) - \varphi(0) \end{array}$$

Řešení. Určitě $\varphi = \psi|_{A_n}: A_n \to A_m$ je afinní zobrazení.

a $\psi|_{\mathrm{Dir}\,A_n}: \mathrm{Dir}\,A_n \to \mathrm{Dir}\,A_m$ indukované lineární zobrazení $\mathrm{Dir}\,\varphi$.

Nechť naopak $\varphi: A_n \to A_m$ je afinní zobrazení s indukovaným lineárním zobrazením

$\mathrm{Dir}\,\varphi: \mathrm{Dir}\,A_n \to \mathrm{Dir}\,A_m$

Musí tedy být ψ tvaru

$$\psi = \begin{pmatrix} \underset{A_m}{\underset{\cap}{\psi(E_0)}} & \underset{\mathrm{Dir}\,A_m}{\underset{\cap}{\psi(e_1)}} & \cdots & \underset{\mathrm{Dir}\,A_m}{\underset{\cap}{\psi(e_n)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(E_0) & \mathrm{Dir}\,\varphi(e_1) & \cdots & \mathrm{Dir}\,\varphi(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$$

Je potřeba ověřit, že $\psi|_{A_n} = \varphi$:

$$\begin{aligned} \psi(1, x^1, \dots, x^n)^T &= \psi(E_0 + x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) \\ &= \psi(E_0) + x^1 \psi(e_1) + \dots + x^n \psi(e_n) \\ &= \varphi(E_0) + x^1\, \mathrm{Dir}\,\varphi(e_1) + \dots + x^n\, \mathrm{Dir}\,\varphi(e_n) \\ &= \varphi(E_0 + x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) \longleftarrow \text{z toho, že } \varphi \text{ je afinní} \\ &= \varphi(1, x^1, \dots, x^n)^T \end{aligned}$$

$\varphi(A+v) = \varphi(A) + \mathrm{Dir}\,\varphi(v)$

$$\Rightarrow \mathrm{Aff}(A_n, A_m) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{n+1}, \mathbb{K}^{m+1}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ b + Ax \end{pmatrix}$$ ← souř. zápis af. zobr.

5

Cv. Dokažte, že lin. zobr. zadávající kolineaci je určeno jednoznačně až na násobek, tj.

$$[\varphi] = \Phi = [\psi] \Rightarrow \exists k \in \Bbbk^\times : \psi = k \cdot \varphi$$

$\mathcal{P}(V) = \{ L \leq V$ přímka proch. poč. $\}$

$v \in V \setminus \{0\} \Rightarrow [v] \in \mathcal{P}(V)$

$(x^0, \dots, x^n) \neq 0 \Rightarrow [(x^0, \dots, x^n)] = (x^0 : \dots : x^n) \in \mathcal{P}_n$

Řešení:

$$[\varphi(e_i)] = \Phi([e_i]) = [\psi(e_i)]$$

$\Rightarrow \psi(e_i) = k_i \cdot \varphi(e_i)$ pro nějaké $k_i \in \Bbbk^\times$

$$[\varphi(e_0 + \dots + e_n)] = [\psi(e_0 + \dots + e_n)]$$

$\Rightarrow \psi(e_0 + \dots + e_n) = k \cdot \varphi(e_0 + \dots + e_n)$ pro nějaké $k \in \Bbbk^\times$

$\psi(e_0 + \dots + e_n) = \psi(e_0) + \dots + \psi(e_n) = k_0 \varphi(e_0) + \dots + k_n \varphi(e_n)$

$k \cdot \varphi(e_0 + \dots + e_n) = k\,\varphi(e_0) + \dots + k\,\varphi(e_n)$

protože $\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_n)$ jsou lin. nez. musí se odpovídající koef. rovnat:

$$k_0 = k, \dots, k_n = k$$

$\Rightarrow \psi(e_i) = k \cdot \varphi(e_i) \Rightarrow \psi = k \cdot \varphi$.

např. $\psi - k\varphi$ je lin. zobr., $e_i \mapsto 0$, tedy nulové

$$\{\text{kolineace } \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_m\} \cong \{\text{inj. lin. zobr. } \Bbbk^{n+1} \to \Bbbk^{m+1}\} / \Bbbk^\times$$

$= \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(m+1)}$, inj

$n = m$: $\quad \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n) \cong GL(n+1) / \Bbbk^\times$ ← je to kvocient grup (faktorgrupa)

$GL(n+1)$ = reg. matice $(n+1) \times (n+1)$

Aut = iso z něčeho do toho samého = auto

6 Cv. Popište vztah mezi afinními ↳ injektivními zobrazeními $\varphi: \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ a kolineacemi $\underline{\psi}: \overline{\mathcal{A}_n} \to \overline{\mathcal{A}_m}$.

Řešení. Afinní zobrazení zadává lin. zobr. $\psi: \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$ splňující $\psi(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{A}_m$ a tedy také $\psi(\mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_n) \subseteq \mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_m$. Odpovídající kolineace proto splňuje

$$\underline{\psi}(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{A}_m \quad , \quad \underline{\psi}(\nu(\mathcal{A}_n)) \subseteq \nu(\mathcal{A}_m)$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{A}_n} & \xrightarrow{\underline{\psi}} & \overline{\mathcal{A}_m} \\ \| & & \| \\ \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_m \\ \sqcup & & \sqcup \\ \nu(\mathcal{A}_n) & \longrightarrow & \nu(\mathcal{A}_m) \end{array}$$

tedy zachovává rozklad na vlastní a nevlastní body. Naopak, každá kolineace zachovávající tento rozklad má jediného reprezentanta ψ splňujícího $\psi(E_0) \in \mathcal{A}_m$

$$\Rightarrow \quad \psi(\mathcal{A}_n) = \psi(E_0 + \mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_n) = \psi(E_0) + \underbrace{\mathrm{Dir}\,\psi(\mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_n)}_{\subseteq\ \mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_m} \subseteq \mathcal{A}_m$$

a zužuje se tedy na afinní zobrazení.

$$\overline{\mathcal{A}_n} = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathcal{P}_n \ni (x^0 : x^1 : \dots : x^n) = [(x^0, x^1, \dots, x^n)]$$

/ leží v $\mathcal{P}(\mathrm{Dir}\,\mathcal{A}_n) = \nu(\mathcal{A}_n)$ → $x_0 = 0$

\ protíná $\mathcal{A}_n$ v jediném → $x_0 \neq 0$ bodě $\left(1, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}\right)$

⇝ identifikujeme — projektivní auto

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \sqcup \nu(\mathcal{A}_n)$$

$(1, x^1, \dots, x^n) \longleftrightarrow (1 : x^1 : \dots : x^n)$ $\qquad (0 : x^1 : \dots : x^n)$

$$\Rightarrow \{\text{affinní izo } \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n\} \subseteq GL(n+1)/\mathbb{K}^\times$$

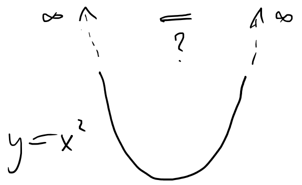
$\{\text{affinní izo } \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n\} \overset{!!}{=} GA(n)$

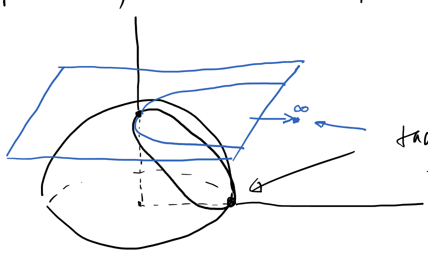
↑ resp. rozklad na vl. a nevl. b.

7

Cv. Spočtěte, kde se potkávají ramena paraboly.

Řešení:





$[n,n^2] = (1,n,n^2)$ $\qquad [-n,n^2] = (1,-n,n^2)$ $\qquad \ldots$ analogicky $(0,0,1)$

na sféře ↓

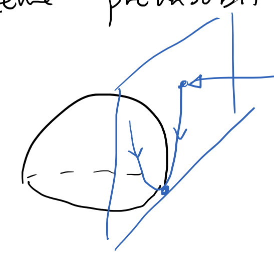
$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}} = \frac{1}{\sqrt{n^4\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}+1\right)}} = \frac{1}{n^2\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}+1}} \longrightarrow (0:0:1)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}}}_{\text{cca } \frac{1}{n^2}\text{, vytkneme}} \cdot (1,n,n^2) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}+1}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}(1,n,n^2)}_{\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n},1\right) \to (0,0,1)} \longrightarrow (0,0,1)$$

↑ nevl. bod ve směru vektoru $(0,1)$

Jednodušeji: není potřeba normovat, můžeme přenásobit $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2}(1,n,n^2) = \left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n},1\right) \longrightarrow (0,0,1)$$



$$\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \longrightarrow P_2$$

$$\begin{array}{ccc}
(1,n,n^2) & \longmapsto & (1:n:n^2) \\
\text{nekonverguje} & & \downarrow n\to\infty \\
\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n},1\right) & \longmapsto & (0:0:1) \\
\downarrow n\to\infty & & \\
(0,0,1) & \longmapsto & (0:0:1)
\end{array}$$

nebudeme definovat konvergenci v P_2, ale lze a potřebujeme pouze spojitost $\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \xrightarrow{[\,]} P_2$