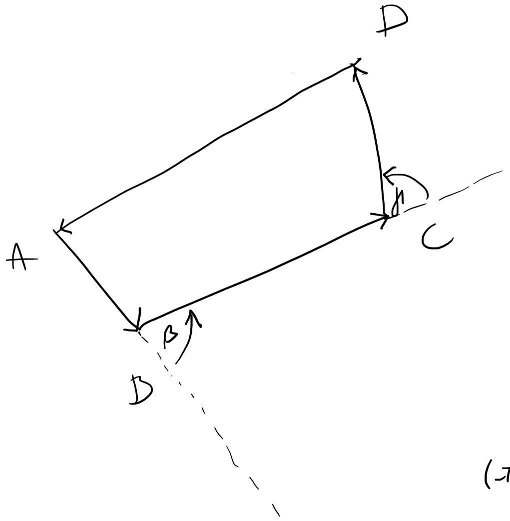
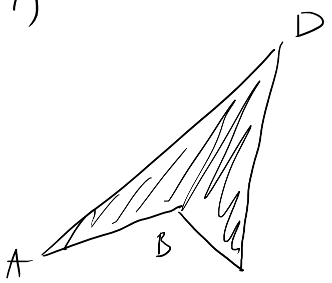
1 Rozhodněte o orientaci a konvexnosti mnohoúhelníka $ABCD$, kde $A=[0,1]$, $B=[3,2]$, $C=[5,0]$, $D=[3,5]$. Které strany lze vidět z počátku $O=[0,0]$?



$\overrightarrow{DA} = (-3,-4)$
$\overrightarrow{AB} = (3,1)$
$\overrightarrow{BC} = (2,-2)$
$\overrightarrow{CD} = (-2,5)$
$\overrightarrow{DA} = (-3,-4)$

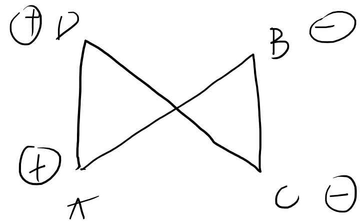
$\mathrm{Vol}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB})$ α ⊕
$\mathrm{Vol}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \sphericalangle \beta$ ⊖
$\mathrm{Vol}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$ γ ⊕
$\mathrm{Vol}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA})$ δ ⊕



orientace mnohoúh.

orientace : kladná
konvexnost : není

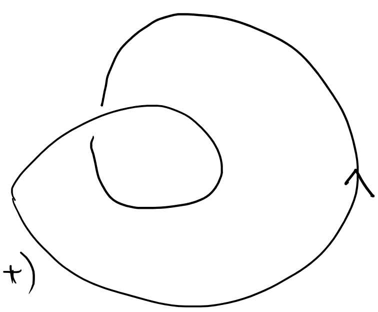
dvě +, dvě −
⇒ není 4-úhelník



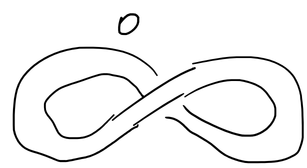
$(-\pi, \pi)$
⇓

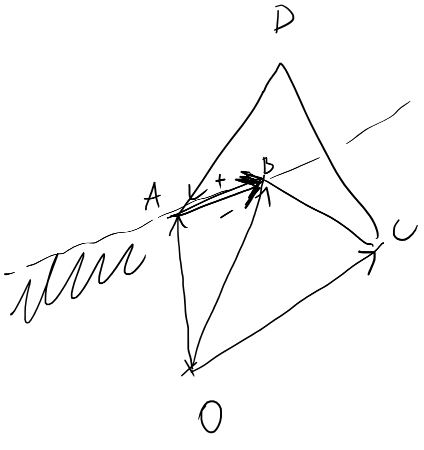
n-úhelník: součet vnějších úhlů je $\pm 2\pi$

součet je $+4\pi$ (všechny úhly +)



součet je 0





$\mathrm{Vol}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$

⊖ O na opačné straně než 4-úhelník
⇒ strana je vidět

2

Pomocí vektoru osy a úhlu popište složení $S \circ R$ rotací

R: okolo $(1,-1,1)$ o úhel $+120°$

S: okolo $(1,1,1)$ o úhel $+60°$

$R: u \longmapsto e^{\varphi \cdot v} \cdot u \cdot e^{-\varphi \cdot v}$ $\quad \varphi = \frac{1}{2}\, 2\pi/3 = \pi/3$

$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

Věta. Toto je rotace okolo v (kde $|v|=1$) o úhel 2φ.

$\quad /\!/ \; e^{\pi/3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}$

$S: u \longmapsto e^{\pi/6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \cdot u \cdot e^{-\pi/6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$

$S \circ R: u \longmapsto \underbrace{e^{\pi/6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \cdot e^{\pi/3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}} \cdot u \cdot \underbrace{\text{--- ---}}_{\text{inverze}}$

vynásobíme a převedeme do quaternion. tvaru

pořadí

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}(1,-1,1)\,\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(3 + \begin{array}{c} i\;\; j\;\; k \\ (1,1,1) \\ \hline 1\; -1\;\; 1 \end{array}\right) \cdot \left(1 + \underline{(1,-1,1)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(3 + 3(1,-1,1) + (1,1,1) - \overset{\langle -,- \rangle}{1} + \overset{- \times -}{(2,0,-2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(2 + (6,-2,2)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1 + (3,-1,1)\right)$$

změna znaménka

$$= \cos\varphi + v \cdot \sin\varphi = e^{\varphi \cdot v} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}},\; v = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,1)$$

$\Rightarrow$ $S \circ R$ je rotace okolo $(3,-1,1)$ o úhel $2\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$(a+v)(b+w)$

$= ab + bv + aw + \underset{\sim}{vw}$

$= ab + bv + aw - \langle v,w \rangle + v \times w$

$$\begin{vmatrix} v^1 & w^1 & i \\ v^2 & w^2 & j \\ v^3 & w^3 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

$(-1)^{r+s} \cdot a_{rs} \cdot \det A_{rs}$

3 Pomocí vektoru osy a úhlu popište složení SoR rotací

R: okolo $(1,0,1)$ o úhel $+90°$

S: okolo $(1,2,1)$ o úhel $+120°$

a) $\left(\cos \quad + \overset{S}{} \quad \sin \quad\right)\left(\cos \quad + \overset{R}{} \quad \sin \quad\right)$

b) vynásobení

c) odpověď

$$S \circ R = \mathrm{conj}_s \circ \mathrm{conj}_r = \mathrm{conj}_{sr}$$

1 2 0 1
0 1 2 0

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac12 + \frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2} + \frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt2}\left(\sqrt2 + \underset{1\ 0\ 1}{(1,2,1)}\right)\frac12\left(\sqrt2 + (1,0,1)\right)$$

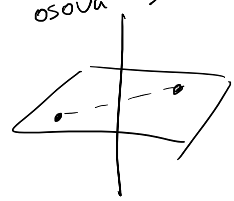
$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{0\ \ 1\ \ 2}{(1,2,0)} \times (0,1,2) \\ = (4,-2,1) \end{array}} \quad \text{navíc}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt2}\left(2 + \sqrt2(1,0,1) + \sqrt2(1,2,1) - 2 + (2,0,-2)\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt2}\left(0 + (2+2\sqrt2,\ 2\sqrt2,\ -2+2\sqrt2)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt2}\left(0 + (1+\sqrt2,\ \sqrt2,\ -1+\sqrt2)\right)$$

osová souměrnost



$\Rightarrow$ SoR je rotace okolo $(1+\sqrt2, \sqrt2, -1+\sqrt2)$ o úhel π.

$(\sqrt2+2,\ 2,\ -\sqrt2+2)$

4 Určete SNF celočíselné matice

∇ řádkové i sloupcové operace

Eukl. alg. Implement. pomocí ř./s. operací

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 16 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 10 \\ 8 & 6 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\times}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 6 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 0 & 16 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & 32 \\ 0 & -12 & -8 & 28 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} -1\times$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 4 \\ 0 & -12 & -8 & 28 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -80 & 52 \\ 0 & 0 & 40 & -12 \end{pmatrix} 3\times$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & -12 \\ & & 76 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & 0 \\ & & 0 & 280 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{SNF}$$

↳ všechny členy kladné

alternativně:

$$\begin{pmatrix} -80 & 52 \\ 40 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 4$ $\qquad q_1 = 4$

$d_2 = 1120$ $\qquad q_2 = 280$

5 Určete SNF celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & -8 \\ -10 & 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 12 \\ 0 & 36 & -36 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gcd(a,b) & 0 \\ 0 & \operatorname{lcm}(a,b) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & +6 & 0 & 0 \\ & 0 & 12 & 24 \\ & 0 & 96 & 72 \end{pmatrix}$$

alt.

$$\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 96 & 72 \end{pmatrix} \underset{\text{rovnou}}{\sim} \begin{pmatrix} 12 & \\ & 120 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 12 & 0 \\ & & 0 & +120 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{SNF}$$