Symetrické a antisymetrické tenzory

$$\operatorname{Hom}(\otimes^p U, V) \underset{\text{sym}}{\supseteq} \operatorname{Hom}(S^p U, V) \qquad \text{— odpovídá } S^p U \subseteq \otimes^p U$$

$$\operatorname{Lin}_p(U, \dots, U; V) \underset{\text{sym}}{\supseteq} \operatorname{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{\text{sym}}$$

$\Rightarrow$ $S^p U$ je ... kvocient

$$\begin{tikzcd} \otimes^p U \arrow[r] \arrow[d, "pr"] & V \\ S^p U \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi : U \times \dots \times U \to V$ je **symetrické**, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) \qquad G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$$

$$\rho_\sigma : \otimes^p U \to \otimes^p U$$
$$u_1 \otimes \dots \otimes u_p \mapsto u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme **symetrickou mocninu** $S^p U$ jakožto kvocient

$$S^p U = \otimes^p U / \operatorname{span}\{u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \mid \sigma \in \Sigma_p,\ u_1, \dots, u_p \in U\}$$
$$= \operatorname{span}\{\rho_\sigma(t) - t \mid \sigma \in \Sigma_p,\ t \in \otimes^p U\}$$
$$= \sum \operatorname{im}(\rho_\sigma - \mathrm{id})$$

t lin. komb. $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

$\rho_\sigma(t) - t$ lin. komb. $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

Označme $pr : \otimes^p U \to S^p U$ kanonickou projekci

$$pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = \text{třída } u_1 \otimes \dots \otimes u_p =: u_1 \vee \dots \vee u_p = u_1 \cdots u_p$$

Protože
$$pr(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) \overset{\text{rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$u_{\sigma(1)} \vee \dots \vee u_{\sigma(p)} \qquad u_1 \vee \dots \vee u_p$$

Př. $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n = \mathbb{Z}/(n=0)$

$\underbrace{2 \cdot 3}_{5+1} = 1$ v $\mathbb{Z}/5$

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$\begin{tikzcd}
(u_1, \dots, u_p) \arrow[dddd, mapsto] & \prod^p U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[ddd, bend right, "t^{\text{sym}}\ \text{sym } p\text{-lin}"'] & & V \\
& \otimes^p U \arrow[d, "pr"] \arrow[urr, dashed, "\exists! G"] & & \\
& & & \\
& S^p U \arrow[uuurr, dashed, "\exists! F"'] & & \\
u_1 \vee \dots \vee u_p & & &
\end{tikzcd}$$

Φ sym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a

$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$$F(u_1 \vee \dots \vee u_p) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$$

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$$
$$= G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) - G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$$
$$= \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) - \Phi(u_1, \dots, u_p) \underset{\Phi \text{ symetrické}}{=} 0$$

Reformulace. Zobrazení

$$\operatorname{Hom}(S^p U, V) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{\text{sym}}$$
$$F \longmapsto F \circ t^{\text{sym}}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že $(S^p U)$ je kvocientem $(T^p U) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{tikzcd} T^p U \times T^q U \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "pr \times pr"] & T^{p+q} U \arrow[d, "pr"] \\ S^p U \times S^q U \arrow[r, dashed, "\vee"] & S^{p+q} U \end{tikzcd}$$

$(t, s) \longmapsto t \otimes s$

$(u_1 \otimes \dots \otimes u_p, v_1 \otimes \dots \otimes v_q) \longmapsto u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$

respektuje kvocient tzn. lze definovat stejně na třídách

$(u_1 \vee \dots \vee u_p, v_1 \vee \dots \vee v_q) \mapsto u_1 \vee \dots \vee u_p \vee v_1 \vee \dots \vee v_q$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1 \times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1 \times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

stejně na třídách

$(u_1 \vee \dots \vee u_p, v_1 \vee \dots \vee v_q) \mapsto u_1 \vee \dots \vee u_p \vee v_1 \vee \dots \vee v_q$

$(u_2 \otimes u_1 - u_1 \otimes u_2) \otimes u_3$
$\underset{\text{ideál}}{\in}$ $\underset{\text{algebra}}{\in}$
$= u_2 \otimes u_1 \otimes u_3 - u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$

Věta. $\{e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} \mid a_1 + \dots + a_n = p\}$ tvoří bázi $S^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: S^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ symetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami $F(e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}) = F(e_1 \vee \dots \vee e_n) = \Phi(e_1, \dots, e_n)$ na $(e_1, \dots e_1, \dots, e_n, \dots, e_n)$ ... tedy $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ kde $i_1 \leq \dots \leq i_p$. □

$\Phi(e_1, e_1)$, $\Phi(e_1, e_2)$, $\Phi(e_2, e_2)$, atd
$\rightsquigarrow$ NE $\Phi(e_2, e_1) = \Phi(e_1, e_2)$

Příklad $U = (\Bbbk^n)^*$ s bází $(f^1, \dots, f^n) = (x^1, \dots, x^n)$ $\quad x^i = f^i$ zobr. $x \mapsto x^i$

$\Rightarrow S^p (\Bbbk^n)^*$ má bázi $\underbrace{(x^1)^{a_1} \dots (x^n)^{a_n}}_{\text{monomy stupně } p}$ = homogenní polynomy stupně p
$\quad \cong \Bbbk^{(p)}[x^1, \dots, x^n]$

$\Rightarrow S(\Bbbk^n)^* \cong \Bbbk[x^1, \dots, x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

$\searrow$ symetrické $\overset{S^2}{x \cdot y = y \cdot x}$, $\overset{\otimes^2}{x \otimes y \neq y \otimes x}$ tenzory = polynomy $x \cdot y$

Pozn. symetrie tenzorů $\neq$ symetrie polynomu

Pozn. $\otimes^p U \overset{\leftarrow - -}{\longrightarrow} S^p U \Rightarrow S^p U$ je izomorfní podprostoru $S^p U \subseteq \otimes^p U$, viz cv.

Antisymetrické tenzory $\leftarrow$ char $\Bbbk = 0$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ je antisymetrické, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí
alternující

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1, \dots, u_p) \cdot \operatorname{sign} \sigma \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \cdot \operatorname{sign} \sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V) & \cong & \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{alt} & & \mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V) \\ \Psi & & \Psi \\ \Phi & & G \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign} \sigma \in \ker G$

Definice. Definujme antisymetrickou mocninu $\Lambda^p U$ jakožto kvocient
$\quad$ " vnější mocnina

$$\Lambda^p U = \otimes^p U / \operatorname{span}\{u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign} \sigma \mid \sigma \in \Sigma_p, u_1, \dots, u_p \in U\}$$
$$= \operatorname{span}\{\rho_\sigma(t) - t \cdot \operatorname{sign} \sigma \mid \sigma \in \Sigma_p, t \in \otimes^p U\}$$
$$= \Sigma \operatorname{im}(\rho_\sigma - \mathrm{id} \cdot \operatorname{sign} \sigma)$$

Označme $\mathrm{pr}: \otimes^p U \to \Lambda^p U$ kanonickou projekci

$\mathrm{pr}(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) =$ třída $u_1 \otimes \dots \otimes u_p =: u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ $\quad \swarrow$ wedge

$u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$
$v_1 \otimes \dots \otimes v_q \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

$$\begin{array}{ccc} \text{Protože } \mathrm{pr}(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\swarrow \text{ rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} & \mathrm{pr}(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign} \sigma) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(p)} & & u_1 \wedge \dots \wedge u_p \cdot \operatorname{sign} \sigma \end{array}$$

$\Lambda^p U \ni t$, $\Lambda^q U \ni s$: $t \wedge s = (-1)^{p \cdot q} s \wedge t$
gradovaně komutativní

je tento součin vektorů antikomutativní, lépe antisymetrický:

$$\begin{tikzcd} (u_1, \dots, u_p) \arrow[ddd, mapsto] & \Pi^p U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{alt}"', "\text{antisym. } p\text{-lin}"] & & V \\ & \otimes^p U \arrow[urr, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & & \\ & \Lambda^p U \arrow[uurr, dashed, "\exists! F"'] & & \\ u_1 \wedge \dots \wedge u_p & & & \end{tikzcd}$$

Φ antisym. p-lin.
$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a
$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign} \sigma) = 0$
$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární
$F(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$

$u_1\wedge\dots\wedge u_p$

Reformulace Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{alt}$$
$$F \longmapsto F\circ t^{alt}$$

je bijekce.

Věta. $\{e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p} \mid i_1<\dots<i_p\}$ tvoří bázi $\Lambda^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F:\Lambda^p U\to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}$. Ekvivalentně $\Phi: U\times\dots\times U\to V$ antisymetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$, kde $i_1<\dots<i_p$.

Nová ingredience: $\Phi(\dots,e_j,e_i,\dots) = (-1)\cdot\Phi(\dots,e_i,e_j,\dots) \Rightarrow$ nulová hodnota. □

prohození = transpozice $\Rightarrow$ znaménko (-1)

$u\wedge u = (-1)\cdot u\wedge u$
$2\cdot u\wedge u = 0 \xRightarrow{\text{char} \neq 2} u\wedge u = 0$

S posledním řádkem se váže: $u_1\wedge\dots\wedge u_p = 0$ pokud $u_i = u_j$ pro nějaké $i\neq j$.

Věta. $u_1\wedge\dots\wedge u_p = 0 \iff$ vektory $u_1,\dots,u_p$ jsou lineárně závislé.

Důkaz. Nechť jsou $u_1,\dots,u_p$ lin. záv., například $u_p = a^1u_1+\dots+a^{p-1}u_{p-1}$

$t^{alt}(u_1,\dots,u_{p-1}, a^1u_1+\dots+a^{p-1}u_{p-1})$

$$\Rightarrow u_1\wedge\dots\wedge u_{p-1}\wedge u_p = u_1\wedge\dots\wedge u_{p-1}\wedge(a^1u_1+\dots+a^{p-1}u_{p-1})$$
$$= a^1\cdot u_1\wedge\dots\wedge u_{p-1}\wedge u_1+\dots+a^{p-1}\, u_1\wedge\dots\wedge u_{p-1}\wedge u_{p-1}$$
$$= 0 \quad \text{(vždy jeden vektor dvakrát)}$$

Nechť jsou $u_1,\dots,u_p$ lin. nezáv. a doplníme je do báze $u_1,\dots,u_p,u_{p+1},\dots,u_n$.
Pak $u_1\wedge\dots\wedge u_p$ je jeden z bázových vektorů $\Lambda^p U \Rightarrow$ je nenulový □

$\Rightarrow \dim\Lambda^p U = \binom{n}{p}$, zejména

$\dim\Lambda^p U = \#\{i_1<\dots<i_p\}$
$= \#\{p\text{-prvková podmn. } \{1,\dots,n\}\}$
$= \binom{n}{p}$

- $\Lambda^p U = 0$ pokud $p>\dim U$
- $\Lambda^n U$ má dimenzi 1 pro $n=\dim U$
  $\ni e_1\wedge\dots\wedge e_n$ generátor

Věta. $\varphi: U\to V$ lin. zobr. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$ báze U, $\bar\alpha = (\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ báze V

$$\Rightarrow \Lambda^n\varphi\,(e_1\wedge\dots\wedge e_n) = \det(\varphi)_{\bar\alpha\alpha}\cdot \bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n$$

nemusí být báze

$$\begin{tikzcd}
\Pi^n U \arrow[r, "\Pi^n\varphi"] \arrow[d, "t"'] & \Pi^n V \arrow[d, "t"] \\
\otimes^n U \arrow[r, dashed, "\otimes^n\varphi"] \arrow[d, "pr"'] & \otimes^n V \arrow[d, "pr"] \\
\Lambda^n U \arrow[r, dashed, "\Lambda^n\varphi"] & \Lambda^n V
\end{tikzcd}$$

$e_1\wedge\dots\wedge e_n \in \Lambda^n U$, $\quad \bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n \in \Lambda^n V$

$$\otimes^n\varphi\,(u_1\otimes\dots\otimes u_n) = \varphi(u_1)\otimes\dots\otimes\varphi(u_n)$$

$$\Lambda^n\varphi\,(u_1\wedge\dots\wedge u_n) = \varphi(u_1)\wedge\dots\wedge\varphi(u_n)$$

Důkaz. Jedná se o výpočet:

$$\Lambda^n\varphi\,(e_1\wedge\dots\wedge e_n) \overset{\text{"def"}}{=} \varphi(e_1)\wedge\dots\wedge\varphi(e_n)$$
$$= \Big(\sum_{i_1} a_1^{i_1}\bar e_{i_1}\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i_n} a_n^{i_n}\bar e_{i_n}\Big)$$
$$= \sum a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\ \bar e_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar e_{i_n}$$

$i_1=\sigma(1),\dots,i_n=\sigma(n)$

$\varphi(u) = \sum \underbrace{a_j^i u^j}_{A\cdot[u]_\alpha}\cdot\bar e_i$, $\quad A = (\varphi)_{\bar\alpha\alpha}$

$\varphi(e_1) = \sum a_j^i\delta_1^j\bar e_i = \sum a_1^i\bar e_i$

$$= \Big(\sum_{i_1} a_1^{i_1}\bar e_{i_1}\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i_n} a_n^{i_n}\bar e_{i_n}\Big)$$

$(\varphi)_{\bar\alpha\alpha}$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\;\bar e_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar e_{i_n}$$

$\underbrace{i_1=\sigma(1),\dots,i_n=\sigma(n)}$

jinak $\bar e_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar e_{i_n}=0$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\;\bar e_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge\bar e_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\;\operatorname{sign}\sigma\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n$$

$$= \det\varphi\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n.$$

□

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$, $\bar\alpha=(\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ báze U, $(e_1,\dots,e_n)=(\bar e_1,\dots,\bar e_n)\cdot P$ $\quad\varphi=\mathrm{id}$

$\Rightarrow\; e_1\wedge\dots\wedge e_n=\det P\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n$ $\quad\dots\quad P=(\mathrm{id})_{\bar\alpha\alpha}$

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$ báze U, $\varphi: U\to U$ operátor $\quad\alpha=\bar\alpha$

$\Rightarrow\;\Lambda^n\varphi:\Lambda^n U\to\Lambda^n U$ je násobení číslem $\det\varphi=\det(\varphi)_{\alpha\alpha}$ nezávisle na α.

$e_1\wedge\dots\wedge e_n\longmapsto c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$

$c\cdot$

$\det(P^{-1}AP)=\det A$

$\Rightarrow\;\det(\psi\circ\varphi)=\det\psi\cdot\det\varphi$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\Lambda^n(\psi\circ\varphi)"'] & \Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\psi"] & \Lambda^n U
\end{tikzcd}$$

Objemy, orientace

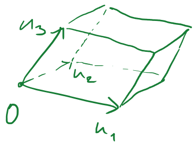
Definice. Objemová forma na vektorovém prostoru U dimenze n je nenulová antisymetrická n-lineární forma

univerzální $\Rightarrow$ $t^{alt} \doteq Vol$ volba měřítka

$$Lin_n(U,\dots,U;\mathbb{k})_{alt} \cong Hom(\Lambda^n U, \mathbb{k})$$

$$\begin{matrix} \Psi & & \Psi \\ Vol & \longleftrightarrow & vol \end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} \Pi^n U \arrow[r, "Vol"] \arrow[d, "t^{alt}"'] & \mathbb{k} \\ \Lambda^n U \arrow[ur, "\cong"', "vol"] & \end{tikzcd}$$



$\Rightarrow$ $Vol(u_1,\dots,u_n) = vol(u_1\wedge\dots\wedge u_n)$ ... orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného $u_1,\dots,u_n$

$\Rightarrow$ vol jednoznačně určeno lib. hodnotou

$$0 \neq vol(e_1\wedge\dots\wedge e_n) = Vol(e_1,\dots,e_n) \quad \dots \ (e_1,\dots,e_n) \text{ báze } U$$

Díky předchozímu: $(u_1,\dots,u_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P$ — matice souřadnic vektorů $u_1,\dots,u_n$ vzhledem k bázi $e_1,\dots,e_n$

$P = ((u_1)_\alpha \ \dots \ (u_n)_\alpha)$

$$\begin{aligned} Vol(u_1,\dots,u_n) &= vol(u_1\wedge\dots\wedge u_n) = vol(\det P\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot vol(e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot Vol(e_1,\dots,e_n) \end{aligned}$$

Příklad. Standardní objemovou formou na $\mathbb{k}^n$ rozumíme tu, pro kterou $Vol(\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{std. báze } \mathbb{k}^n}) = 1$. Pak

$$Vol(u_1,\dots,u_n) = \det(u_1 \dots u_n).$$

Nechť $\varphi: U \to U$ je operátor. Pak

$$Vol(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n)) = \det\varphi\cdot Vol(u_1,\dots,u_n)$$

tj. zobrazení φ zvětšuje orientovaný objem $\det\varphi$-krát.

orientovaný objem = orientovaný + objem

$$Vol(u_1,\dots,u_n) = sign\, Vol(e_1,\dots,e_n)\cdot |Vol(e_1,\dots,e_n)|$$

Definice. Orientace reálného vektorového prostoru U je zobrazení

$$sign: \{\text{báze } U\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

splňující $\bar\alpha = \alpha\cdot P \Rightarrow sign\,\bar\alpha = sign\,\det P\cdot sign\,\alpha$

$\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n = c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$ pro $c>0$ resp. $c<0$

Podrobněji ... $sign\,\bar\alpha = sign\,\alpha$ pro souhlasně orientované báze

$sign\,\bar\alpha = -sign\,\alpha$ pro opačně orientované báze

Pozn. souhlasná orientace $\longrightarrow$ rozklad na dvě třídy, sign = označení — kladné báze / záporné báze

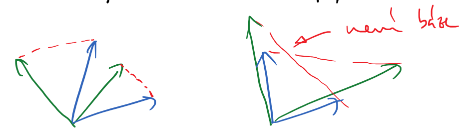
Příklad. • $\mathbb{R}^n$ má standardní orientaci danou tím, že standardní báze je kladná: $\operatorname{sign}(e_1, \dots, e_n) = +1$.

• Komplexní vektorový prostor U chápaný jako reálný vektorový prostor $U^{\mathbb{R}}$ má standardní orientaci danou:

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ báze } U \Rightarrow (e_1, \dots, e_n, i\cdot e_1, \dots, i\cdot e_n) \text{ kladná báze } U^{\mathbb{R}}$$

• Vektorový prostor dimenze 0, tj. $0 = \{0\}$ má jedinou bázi a ta může být pořád kladná nebo záporná.

Věta. Nechť α, β jsou dvě báze $\mathbb{R}^n$ chápané jako matice $\alpha, \beta \in GL(n)$. Potom α, β jsou souhlasně orientované, právě když je lze spojit cestou v $GL(n)$.



Důkaz. Jestliže $\mu: [0,1] \to GL(n)$ je spojité zobrazení (cesta) s $\mu(0) = \alpha$, $\mu(1) = \beta$, pak

$\det \mu(t): [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je spojité $\Rightarrow$ stále kladné / stále záporné.

Naopak nechť $\operatorname{sign} \alpha = \operatorname{sign} \beta$. Pak lze α převést na β pomocí operací

• přičtení násobku sloupce --- $P = \begin{pmatrix} 1 & \\ k & 1 \end{pmatrix}$ --- $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \\ tk & 1 \end{pmatrix}$

$\beta = \alpha \cdot P$ --- $\mu(t) = \alpha \cdot P(t)$

• vynásobení sloupce kladným číslem e^k --- $P = \begin{pmatrix} e^k & \\ & 1 \end{pmatrix}$ --- $P(t) = \begin{pmatrix} e^{kt} & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\beta = \alpha \cdot P$ --- $\mu(t) = \alpha \cdot P(t)$

Místo prohazování sloupců:

$$\underset{I \to I + II}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{II \to II - I}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{I \to I + II}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

= prohození + vynásobení jednoho z nich (-1)

Násobení dvou sloupců (-1): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Orientovaný eukleidovský prostor

Nechť U je or. eukl. pr., $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ dvě kladné ortonormální báze. Pak $\bar{\alpha} = \alpha \cdot P$ a P má:

• $\det P > 0$ protože $\bar{\alpha}, \alpha$ mají souhlasnou orientaci

• $|\det P| = 1$ protože P je ortogonální $(P^* P = E \Rightarrow |\det P|^2 = 1)$

$\Rightarrow \det P = 1$.

Definujme kanonickou objemovou formu požadavkem

$$\operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{pro libovolnou kladnou ortonormální bázi}$$

$$(\Rightarrow \operatorname{Vol}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n))$$

Nechť $(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot P \Rightarrow P = ((u_1)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha) = (f^i(u_j))$

Pak $\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \det P$

$\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$

$(((u_1)_\alpha^T \quad (\quad \dots \quad))$

$$\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} (u_1)_\alpha^T \\ \vdots \\ (u_n)_\alpha^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_1)_\alpha & \dots & (u_n)_\alpha \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\det \underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \dots & \langle u_1,u_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n,u_1\rangle & \dots & \langle u_n,u_n\rangle \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}}}_{\text{Gramův determinant}} = \det(\langle u_i,u_j\rangle)$$

Věta.
- $\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \det(f'(u_j))$ v lib. kl. ortonorm. bázi … znaménko
- $\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)^2 = \det(\langle u_i,u_j\rangle)$ nezávislé na orientaci

Pozn. Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

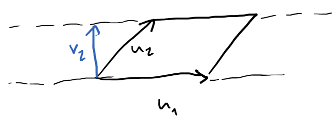
$(u_1,\dots,u_n) \rightsquigarrow (v_1,\dots,v_n)$ ortogonální $\qquad v_i = u_i + $ lin. komb. $u_1,\dots,u_{i-1}$

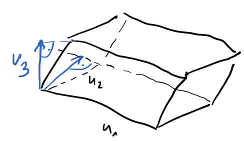
$$P = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)^2 = \mathrm{Vol}(v_1,\dots,v_n)^2$$

$$= \det\begin{pmatrix} |v_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |v_n|^2 \end{pmatrix} = |v_1|^2 \cdots |v_n|^2$$

$\Rightarrow |\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)| = |v_1| \cdots |v_n| = $ objem rovnoběžnostěnu $\qquad$ je to fakt objem!





Geometrie v orientované eukleidovské rovině.

$$\mathrm{Vol}(u,v)^2 = \det\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix} = |u|^2|v|^2 - (|u|\cdot|v|\cdot\cos\alpha)^2$$

$$= |u|^2\cdot|v|^2\cdot\sin^2\alpha$$

$$|\mathrm{Vol}(u,v)| = |u|\cdot|v|\cdot\sin\alpha$$

Zavedeme orientovaný úhel $\measuredangle(u,v) \in [-\pi,\pi]$:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\cdot|v|} \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{Vol}(u,v)}{|u|\cdot|v|}$$

$|v| = |u|$, $\measuredangle(u,v) = +90°$ $\Leftrightarrow$ násobení i = rotace o $+90°$

$\Rightarrow$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$: $(a+i\cdot b)\,u = au + bv$

Naopak násobení komplexními čísly dá orientaci + sk. součin až na násobek

$$\measuredangle(u,v) = \arg\left(\frac{v}{u}\right) \qquad \frac{|v|}{|u|} = \left|\frac{v}{u}\right| = \text{relativní velikost}$$

Geometrie v orientovaném eukleidovském prostoru (dimenze 3)

$\mathrm{Vol}(u,v,-): U \to \mathbb{R}$ lineární forma

připomeňme $R: U \xrightarrow{\cong} U^*$, $x \mapsto \langle x,-\rangle$

$\Rightarrow$ ex. jediný vektor $u\times v$ t.ž.

$$\mathrm{Vol}(u,v,w) = \langle u\times v, w\rangle$$

(tj. vzor $u\times v \in U \xrightarrow[\cong]{R} U^* \ni \mathrm{Vol}(u,v,-)$)

Zjevně je $u\times v$ lineární v každé složce a antisymetrické

$-\times-: U\times U \to U$ (vlastně $\Lambda^2 U \to U$)

Jak vypadají hodnoty na dvojicích bázových vektorů?

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_1)=0 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_1\rangle = 0 \\ \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_2)=0 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_2\rangle = 0 \\ \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_3)=1 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_3\rangle = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} e_1\times e_2 = e_3 \\ e_2\times e_3 = e_1 \\ e_3\times e_1 = e_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} e_2\times e_1 = -e_3 \\ e_3\times e_2 = -e_1 \\ e_1\times e_3 = -e_2 \end{array}$$

Takto lze vektorový součin počítat v souřadnicích:

$$\begin{aligned} u\times v &= \langle u\times v, e_1\rangle e_1 + \langle u\times v, e_2\rangle e_2 + \langle u\times v, e_3\rangle e_3 \\ &= \mathrm{Vol}(u,v,e_1)e_1 + \mathrm{Vol}(u,v,e_2)e_2 + \mathrm{Vol}(u,v,e_3)e_3 \\ &= \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0\end{pmatrix} e_1 + \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0\end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1\end{pmatrix} e_3 \\ &\text{,,=''} \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & e_1 \\ u^2 & v^2 & e_2 \\ u^3 & v^3 & e_3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\leftarrow$ klasický inženýrský vzorec (až na transponování a možné pořadí)

Geometrická verze:

Věta. Vektorový součin má následující vlastnosti:

- $u\times v$ je kolmý na u, v
- $u\times v \neq 0$, právě když u,v jsou lineárně nezávislé a pak
- $(u, v, u\times v)$ je kladná báze
- $|u\times v| = |u|\cdot|v|\cdot \sin\measuredangle(u,v)$

Kvaterniony

Definice. Algebra kvaternionů $\mathbb{H}$ je $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\{1,i,j,k\}$ společně s násobením daným tabulkou

$q \cdot r$: $q \backslash r$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

$\longrightarrow$ zadává jediné bilineární zobrazení $\mathbb{H}\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$

je potřeba ověřit, že je asociativní ...

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

Kvaternion $q \in \mathbb{H}$ můžeme psát v algebraickém tvaru

$$q = a + bi + cj + dk$$

nebo ve vektorovém tvaru $\quad bi + cj + dk = (b,c,d) = u \in \mathbb{R}^3$

$$q = a + u$$

Geometrická interpretace násobení kvaternionů

$$(a+u)(b+v) = \underbrace{ab}_{\text{násobení skalárů}} + \underbrace{av + bu}_{\text{násobení skaláry}} + \underbrace{uv}_{\underbrace{-\langle u,v\rangle}_{\text{symetrická část}} + \underbrace{u\times v}_{\text{antisymetrická část}}}$$

$$u\cdot v = -\langle u,v\rangle + u\times v \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}(u\cdot v + v\cdot u) = -\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\,(u\cdot v)$$

$$\tfrac{1}{2}(u\cdot v - v\cdot u) = u\times v = \mathrm{Im}\,(u\cdot v)$$

$$u\cdot v\cdot w = -\langle u,v\rangle w \underbrace{- \langle u\times v, w\rangle}_{-\mathrm{Vol}(u,v,w)\in\mathbb{R}} + (u\times v)\times w \quad\Longrightarrow\quad -\mathrm{Vol}\,(u,v,w) = \mathrm{Re}\,(u\cdot v\cdot w)$$

Inverze: (jako pro komplexní čísla)

$$q = a + u \quad\Longrightarrow\quad q^* = a - u$$

$$q\cdot q^* = (a+u)(a-u) = a^2 - au + au \underbrace{- u\cdot u}_{\langle u,u\rangle - \underbrace{u\times u}_{0}}$$

$$= a^2 + |u|^2 = |q|^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\cdot q^*$$

Goniometrický tvar jednotkového kvaternionu q, tj. t.ž. $|q| = 1 \Longrightarrow q^{-1} = q^*$

$$a^2 + |u|^2 = |q|^2 = 1$$

normovaný vektor, např. i, j, k

$$\Rightarrow a = \cos\varphi, \quad |u| = \sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad u = v\cdot\sin\varphi$$

$$a = \cos\varphi + v\cdot\sin\varphi = e^{v\cdot\varphi}$$

naopak $(e^{v\cdot\varphi})^{-1} = e^{-v\cdot\varphi}$

⚠ nejednoznačnost: $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e^{v\cdot\varphi} = e^{(-v)\cdot(-\varphi)}$

$$\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi = \cos(-\varphi) + (-v)\cdot\sin(-\varphi)$$

$\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ $\Rightarrow$ v zcela nejednoznačné

Naším cílem bude reprezentovat otočení pomocí násobení kvaternionů

$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \qquad \rightsquigarrow \qquad \operatorname{Im}\mathbb{H} \longrightarrow \operatorname{Im}\mathbb{H}$$

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} \qquad\qquad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Lemma.

- $u\cdot v = v\cdot u \iff u \parallel v$
- $u\cdot v = -v\cdot u \iff u \perp v$

Nechť nyní $u \parallel v$:

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} = (\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi)\cdot u\cdot(\cos\varphi - v\cdot\sin\varphi)$$

$$= \underbrace{e^{v\cdot\varphi}\cdot e^{-v\cdot\varphi}}_{1}\cdot u = u$$

$\Rightarrow$ zobrazení je id na přímce generované v.

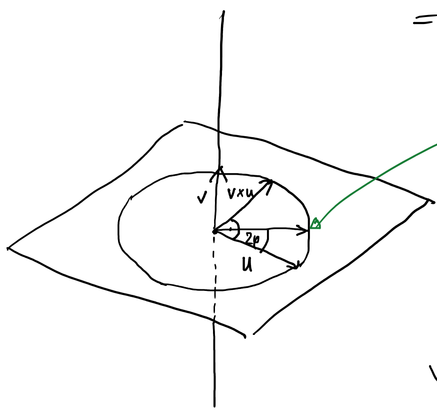
Nechť nyní $u \perp v$:

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} = (\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi)\cdot u\cdot(\cos\varphi - v\cdot\sin\varphi)$$

$$= e^{v\cdot\varphi}\cdot e^{v\cdot\varphi}\cdot u = e^{v\cdot(2\varphi)}\cdot u$$

$$= (\cos(2\varphi) + v\cdot\sin(2\varphi))\cdot u$$

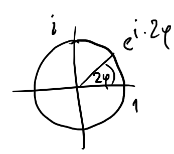
$$= u\cdot\cos(2\varphi) + v\times u\cdot\sin(2\varphi)$$



$$\longleftarrow \quad \mathbb{C}$$

$$u \longleftarrow 1$$

$$v\times u \longleftarrow i$$



konformní zobrazení
$\Rightarrow$ zachovává poměry velikostí a úhly
(obrazy kolmé a stejně velké)

$\Rightarrow$ zobrazení je rotace o úhel 2φ v rovině $v^{\perp}$
+ směr „podle pravidla pravé ruky" = ve směru od $\underline{u}$ k $\underline{v \times u}$.

Věta. Zobrazení $u \mapsto e^{v\cdot\varphi} \cdot u \cdot e^{-v\cdot\varphi}$ dané konjugací jednotkovým kvaternionem $e^{v\cdot\varphi}$ je na $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} \mathbb{H}$ rotace okolo vektoru v o úhel 2φ.

Poznámka. Prostor rotací $SO(3)$

$$S^3 \longrightarrow SO(3)$$
$$q \longmapsto (u \mapsto q u q^{-1})$$

je surjektivní homomorfismus grup. Jaké je jeho jádro?

$$e^{v\cdot\varphi} \in \ker, \quad |v| = 1, \quad \varphi \in [0,\pi] \iff \varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi$$

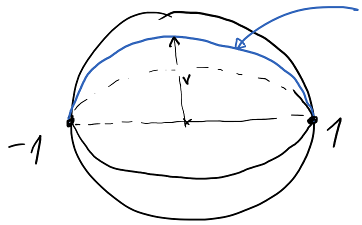
$\Rightarrow \ker = \{\pm 1\}$

$$S^3/\{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} SO(3)$$

„dvojnásobné nakrytí"

reálný projektivní prostor dimenze 3

$$\Rightarrow SO(3) \cong \mathcal{P}_3 \ (= \mathbb{R}P^3)$$



$\cos(\pi \cdot t) + v \cdot \sin(\pi \cdot t) \longmapsto$ rotace okolo v o úhel $2\pi \cdot t$

$t \in [0,1]$