

# Kvaterniony

Definice. Algebra kvaternionů  $\mathbb{H}$  je  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\{1, i, j, k\}$  společně s násobením danou tabulkou

q.r.  $\begin{matrix} & 1 & i & j & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & -1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$   $\rightarrow$  zadání jediné bilineární zobrazení  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  je potřeba ověřit, že je asociativní ...

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

vekt. součin (green)  
sk. součin (blue)

Kvaternion  $q \in \mathbb{H}$  můžeme psát v algebraickém tvaru

$$q = a + bi + cj + dk$$

nebo ve vektorovém tvaru  $bi + cj + dk = (b, c, d) = u \in \mathbb{R}^3$

$$q = a + u$$

Geometrická interpretace násobení kvaternionů

Pozn.  
 $\mathbb{H} \subseteq \text{Mat}_{2 \times 2} \mathbb{C}$   
 $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$   
 $j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   
 $k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$(a+u)(b+v) = \underbrace{ab}_{\text{násobení skalárů}} + \underbrace{av + bu}_{\text{násobení skalárů}} + \underbrace{uv}_{\text{Re-část}} = \underbrace{-\langle u, v \rangle}_{\text{symetrická část}} + \underbrace{u \times v}_{\text{antisymetrická část}} = \text{vektorová část}$$

$(\alpha\beta)_j = \alpha(\beta_j)$

$$u \cdot v = -\langle u, v \rangle + u \times v \Rightarrow \frac{1}{2}(u \cdot v + v \cdot u) = -\langle u, v \rangle = \text{Re}(u \cdot v)$$

$$v \cdot u = -\langle u, v \rangle - u \times v \Rightarrow \frac{1}{2}(u \cdot v - v \cdot u) = u \times v = \text{Im}(u \cdot v)$$

$$u \cdot v \cdot w = -\langle u, v \rangle w - \underbrace{\langle u \times v, w \rangle}_{-\text{Vol}(u, v, w) \in \mathbb{R}} + (u \times v) \times w \Rightarrow -\text{Vol}(u, v, w) = \text{Re}(u \cdot v \cdot w)$$

Inverze: (jako pro komplexní čísla)

$$q = a + u \Rightarrow q^* = a - u$$

$$q \cdot q^* = (a+u)(a-u) = a^2 - au + au - u \cdot u = a^2 + |u|^2 =: |q|^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot q^* \Rightarrow \text{každý kvaternion } q \neq 0 \text{ má inverzi}$$

Geometrický tvar jednotkového kvaternionu  $q$ , tj. t.j.  $|q|=1 \Rightarrow q^{-1} = q^*$

$$a^2 + |u|^2 = |q|^2 = 1 \Rightarrow \varphi \in [0, \pi]$$

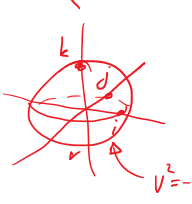
$$\Rightarrow a = \cos \varphi, |u| = \sin \varphi \Rightarrow u = v \cdot \sin \varphi$$

normovaný vektor, např.  $i, j, k$

$$q = \underbrace{\cos \varphi}_a + \underbrace{v \cdot \sin \varphi}_u = e^{v \cdot \varphi} = 1 + \frac{1}{1!} v \cdot \varphi + \frac{1}{2!} v^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} v^3 \varphi^3 + \dots = \cos \varphi + v \cdot \sin \varphi$$

naopak  $(e^{v \cdot \varphi})^{-1} = e^{-v \cdot \varphi}$

$$\uparrow \text{nejednoznačnost: } \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, e^{v \cdot \varphi} = e^{(v \cdot (-\varphi))}$$



$$\cos \varphi + v \cdot \sin \varphi = \cos(-\varphi) + (-v) \cdot \sin(-\varphi)$$

$\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow v$  zcela jednoznačně  
 $\varphi \rightarrow \pi$

Následně cílem bude reprezentovat otáčení pomocí násobení kvaternionů

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} && \rightsquigarrow \text{Im } \mathbb{H} \rightarrow \text{Im } \mathbb{H} \\ u &\mapsto e^{v \cdot \varphi} \cdot u \cdot e^{-v \cdot \varphi} && \parallel \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Lemna.  $u \mapsto q \cdot u \cdot q^{-1}$  - konjugace prvkem  $q$

- $u \cdot v = v \cdot u \Leftrightarrow u \parallel v$
- $u \cdot v = -v \cdot u \Leftrightarrow u \perp v$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= v \cdot u && \Leftrightarrow u \times v = 0 \\ \parallel &&& \Leftrightarrow u \parallel v \\ \underbrace{-(u,v) + u \times v} & & \underbrace{-(u,v) - u \times v} & \end{aligned}$$

Nechť nyní  $u \parallel v$ :

$$\begin{aligned} u &\mapsto e^{v \cdot \varphi} \cdot u \cdot e^{-v \cdot \varphi} = (\cos \varphi + v \cdot \sin \varphi) \cdot u \cdot (\cos \varphi - v \cdot \sin \varphi) \\ &= \underbrace{e^{v \cdot \varphi} \cdot e^{-v \cdot \varphi}}_1 \cdot u = u \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  zobrazení je id na přímce generované  $v$ .

Nechť nyní  $u \perp v$ :

$$\begin{aligned} u &\mapsto e^{v \cdot \varphi} \cdot u \cdot e^{-v \cdot \varphi} = (\cos \varphi + v \cdot \sin \varphi) \cdot u \cdot (\cos \varphi - v \cdot \sin \varphi) \\ &= e^{v \cdot \varphi} \cdot e^{v \cdot \varphi} \cdot u = e^{v \cdot (2\varphi)} \cdot u \\ &= (\cos(2\varphi) + v \cdot \sin(2\varphi)) \cdot u \\ &= u \cdot \cos(2\varphi) + v \times u \cdot \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

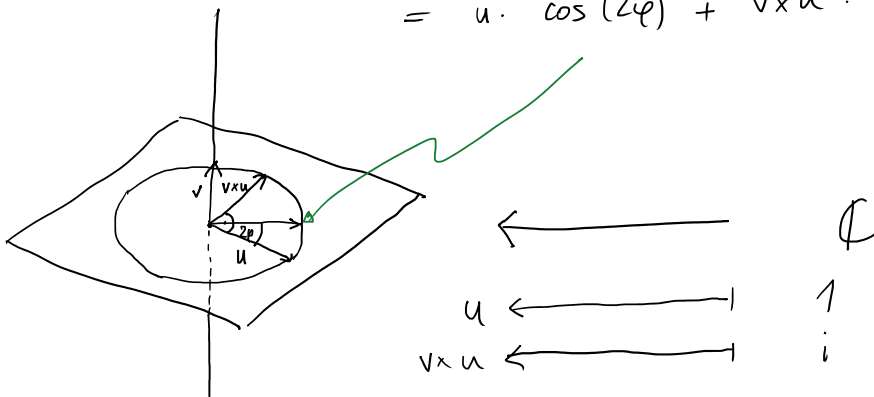
$$\begin{aligned} v \cdot u &= \underbrace{-\langle v, u \rangle}_0 + v \times u \\ &= v \times u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y & \quad \langle x, y \rangle = 0 \\ & \quad |x| = |y| \end{aligned}$$

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$



konformní zobrazení  
 $\Rightarrow$  zachovával poměr velikostí a úhly (obrazy kolmé a stejné veliké)



$$u \cdot \cos(2\varphi) + v \times u \cdot \sin(2\varphi) \leftarrow 1 \cdot \cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi)$$

$\Rightarrow$  zobrazení je rotace o úhel  $2\varphi$  v rovině  $v^\perp$

+ směr „podle pravidla pravé ruky“ = ve směru od  $u$  k  $v \times u$ .

Věta. Zobrazení  $u \mapsto e^{v \cdot \varphi} \cdot u \cdot e^{-v \cdot \varphi}$  dané konjugací jednotkovým kvaternionem  $e^{v \cdot \varphi}$  je na  $\mathbb{R}^3 = \text{Im } \mathbb{H}$  rotace okolo vektoru  $v$  o úhel  $2\varphi$ .

Poznámka. Prostor rotací  $SO(3)$   
 $\{q \in \mathbb{H} \mid |q|=1\} \stackrel{\cong}{=} S^3 \xrightarrow{\text{jednotková sféra dimenze 3}} SO(3)$   
 $q \mapsto (u \mapsto quq^{-1})$

$$u \xrightarrow{R_1} e^{v_1 \cdot \varphi_1} \cdot u \cdot e^{-v_1 \cdot \varphi_1} \xrightarrow{R_2} \underbrace{e^{v_2 \cdot \varphi_2} e^{v_1 \cdot \varphi_1}}_{e^{v \cdot \varphi}} u \underbrace{e^{-v_1 \cdot \varphi_1} e^{-v_2 \cdot \varphi_2}}_{e^{-v \cdot \varphi}}$$

je surjektivní homeomorfismus grup. Jakké je jeho jádro?

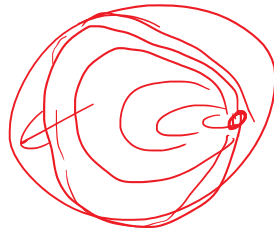
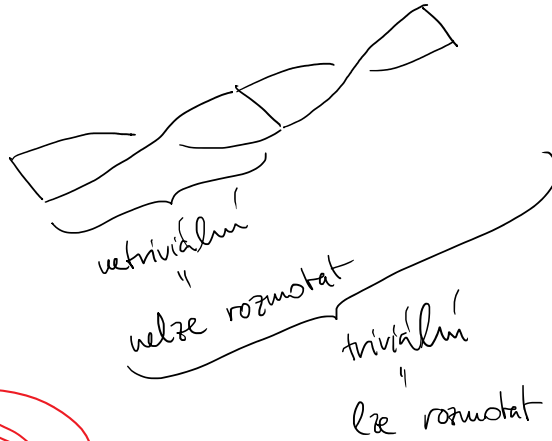
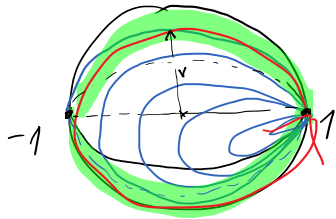
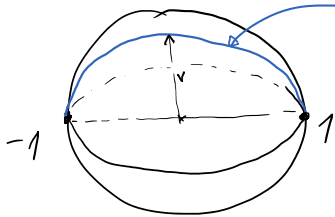
$$e^{v \cdot \varphi} \in \ker, \quad |v|=1, \varphi \in [0, \pi] \iff \varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi$$

$$\Rightarrow \ker = \{\pm 1\}$$

$$S^3 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} SO(3)$$

„dvojnasobně natknutí“ reálný projektivní prostor dimenze 3  
 $\Rightarrow SO(3) \cong \mathbb{P}^3 (= \mathbb{R}P^3)$

$\cos(\pi \cdot t) + v \cdot \sin(\pi \cdot t) \mapsto$  rotace okolo  $v$  o úhel  $2\pi \cdot t$   
 $t \in [0, 1]$



# Celočíselné matice, SNF, prezentace abelovských grup

$\text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$  ... matice s celočíselnými prvky

$\Psi$   
 $A$  zobrazení  $\mathbb{Z}^m \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n, x \mapsto A \cdot x$  — zjevně homo grup  $A(x+y) = Ax + Ay$

Tvrzení zobrazení  $\text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$  je bijekce.

Důkaz  $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$   $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)) \leftarrow \varphi$

$$\varphi(x) = \varphi(x^1 e_1 + \dots + x^m e_m) = x^1 \varphi(e_1) + \dots + x^m \varphi(e_m) = (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_m)) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = A \cdot x \quad \square$$

Implicitně používáme:

$M$  komutativní grupa psaná aditivně  $\Rightarrow v \in M$  umíme „násobit celými čísly“

$$k \cdot x = \underbrace{x + \dots + x}_{k \text{ krát}} \quad 0 \cdot x = 0 \quad (-k) \cdot x = \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{k \text{ krát}}$$

$\Rightarrow$  násobení „stabiliz“  $\mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ , ale  $\mathbb{Z}$  není těleso  $\Rightarrow$  spousta LA neplatí

$\Rightarrow$  homomorfismy grup zahrnující toto násobení  $\Rightarrow$  jsou „lineární“

Cíl: vyjádřit  $A: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  „ve vhodných bázích“

$P \cdot A \cdot Q$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 invertibilní

jak to vyjde v LA?

$$\text{im} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A|B \dots \exists P, Q: B = PAQ$   
 $\Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk } B$

$$\mathbb{K}^m \xrightarrow{A} \mathbb{K}^n$$

$$[e_1, \dots, e_r, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_m}_{\text{báze ker } A}] \quad [e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n]$$

$e_i = A e_i$

Tvrzení Matice  $A \in \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{Z}$  je invertibilní  $\Leftrightarrow n=m$  a  $\det A = \pm 1$ .

Důkaz • Necht'  $B \in \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{Z}$  je inverze k  $A$ . Potom jsou inverze i nad  $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow n=m \quad \text{a} \quad \underbrace{\det A}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\det B}_{\in \mathbb{Z}} = \det(A \cdot B) = \det E = 1$$

• Necht' naopak  $A$  je čtvercová s  $\det A = \pm 1$ . Existuje  $A^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{Q}$  a je dána vzorcem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{matice alg. doplňků se znaménky a transponovaná}) \in \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{Z}. \quad \square$$

Podmínka Stejný důkaz funguje nad libovolným komutativním obrem  $R$ .  
 Je-li  $R$  obor integrity, používáme namísto  $R$  podílové těleso  $\mathbb{Q}(R)$ .

Jinak:  $M \subseteq R$  lib. max. ideál  $\rightsquigarrow \mathbb{K} = R/M$  a opět dostaneme  $n=m$   
 formula pro inverzi funguje stejně.

Bez komutativity: existují invertibilní vektorcové matice!  
 v důkazu se používají determinanty — nedávají smysl

## Věta (o Smithově normálním tvaru = SNF).

Nechť  $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$ . Pak existují invertibilní matice  $P, Q$  t.č.

•  $P, Q$  jsou součiny elementárních matic nad  $\mathbb{Z}$

•  $P^{-1}AQ = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} q_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & q_r & \\ \hline 0 & & & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right) = S$  } matice ve Smithově normálním tvaru  
přičemž  $q_1 | \dots | q_r$

• čísla  $q_1, \dots, q_r$  jsou jednoznačná až na znaménko (pro nás kladná  $\Rightarrow$  jednoznačná); nazývají se **invariantní faktory**.

• konkrétněji:

$$d_i = \text{gcd} \{ \text{minory } i \times i \text{ matice } A \}; \quad d_0 = 1$$

$$q_i = d_i / d_{i-1}$$

$$d_i = \text{gcd} \{ \text{prvky matice } A \}$$

← jediný minor  $\det() = 1$  ?

Důkaz. • Algoritmus vyložíme na cítičem - kombinace Eukleidova algoritmu k vyhledání nejv. spol. děl. prvků matice a Gaussovy eliminace k následné eliminaci prvků mimo diagonálu (obojí pomocí elementárních operací).

• Studujeme, co se děje s  $d_i$  při (ne nutně elem./invert. operacích):

$$B = P \cdot A \Rightarrow \text{řádky } B \text{ jsou kombinacemi řádků } A$$

$$\Rightarrow \text{minory } B \text{ jsou kombinacemi minorů } A \quad (\Rightarrow \text{dělitelné } d_i(A))$$

$$\Rightarrow d_i(A) \mid d_i(B)$$

$$\text{Je-li } P \text{ invertibilní, pak } A = P^{-1} \cdot B \Rightarrow d_i(A) = d_i(B)$$

$$\Rightarrow d_i(A) / d_{i-1}(A) = d_i(B) / d_{i-1}(B)$$

To samé pro sloupcové operace.

$$\Rightarrow d_i(A) / d_{i-1}(A) = d_i(S) / d_{i-1}(S) = q_1 \dots q_i / q_1 \dots q_{i-1} = q_i. \quad \square$$

$$S = P^{-1}AQ \Leftrightarrow A = PSQ^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{im } A = P(\text{im } S) = P[q_1 e_1, \dots, q_r e_r] = [q_1 P e_1, \dots, q_r P e_r]$$

$$\Rightarrow \text{ker } A = Q(\text{ker } S) = Q[e_{r+1}, \dots, e_m] = [Q e_{r+1}, \dots, Q e_m]$$

← sloupce matice P

← sloupce matice Q

## Prezentace konečně generovaných abelovských grup

Cíl. Strukturální věta pro kon. gen. ab. grupy = popis až na izo

$M$  kon. gen. abelovská grupa, generovaná  $a_1, \dots, a_n$   
" komutativní, písemně aditivně ...

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow M, \quad \varphi(x) = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{surjektivní homomorfismus}$$

$\Rightarrow M \cong \mathbb{Z}^n / \ker \varphi$  ... pochopit kon-gen. ab. grupy = pochopit podgrupy  $\mathbb{Z}^n$  a příslušné kvocienty

Věta. Každá podgrupa  $\mathbb{Z}^n$  je konečně generovaná (ve skutečnosti izomorfní  $\mathbb{Z}^m$  pro  $m \leq n$ ).

Důkaz. Indukcí: •  $n=0$  triviální

•  $M \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  podgrupa

označme  $p: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  projekci na první složku, pak  $\ker p \cong \mathbb{Z}^n$

a  $\ker p \cap M = [a_{11}, \dots, a_{1n}]$ .

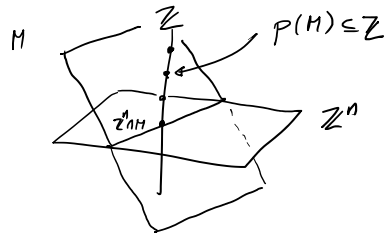
$p(M) \subseteq \mathbb{Z}$  podgrupa  $\Rightarrow p(M) = \mathbb{Z} \cdot t, \quad t = p(a_0)$

Tvrzení, že  $M = [a_0, a_{11}, \dots, a_{1n}]$

$x \in M \Rightarrow p(x) \in p(M) = \mathbb{Z} \cdot t \Rightarrow p(x) = y^0 \cdot t = p(y^0 \cdot a_0)$

Tedy  $x - y^0 a_0 \in \ker p \cap M \Rightarrow x - y^0 a_0 = y^1 a_1 + \dots + y^m a_m$ .

$\Rightarrow x = y^0 a_0 + y^1 a_1 + \dots + y^m a_m$ . □



$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} M$

$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{R} \ker \varphi \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} M$

$\underbrace{\hspace{10em}}_R$

$\Rightarrow M \cong \mathbb{Z}^n / \ker \varphi = \mathbb{Z}^n / \text{im } R =: \text{coker } R$

$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} M$

↑            ↑  
relace M    generatory M

nazveme **prezentací** abelovské grupy M

•  $\varphi$  surjektivní }  $M \cong \text{coker } R$  ← matice  $R \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$   
•  $\text{im } R = \ker \varphi$

↑  
určuje M až na izo  
co říkáme SNF?

$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{coker } R \cong M$

$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{S} \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{coker } S \cong ?$

$Q \cong \uparrow P$

určeno P:  $Px + \text{im } R$

(inverse určena  $P^{-1}$ )  $x + \text{im } S$

$(P(\text{im } S) = \text{im } PS = \text{im } RQ \subseteq \text{im } R)$

Tvrzení.  $S = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & \dots & a_{1r} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{coker } S \cong \mathbb{Z}/q_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^{n-r}$

||  
 $\mathbb{Z}^n / \text{im } S$

Důkaz.

$(x^1, \dots, x^n) + \text{im } S \longleftrightarrow (x^1 + Zq_1, \dots, x^r + Zq_r, x^{r+1}, \dots, x^n)$  □

zpět mířeme vynechat všechny činitele  $\mathbb{Z}/1 = 0$ .

Věta. Každá konečně generovaná abelovská grupa je izomorfní  $\mathbb{Z}/q_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^k$  kde  $1 \neq q_1 | \dots | q_r$ ,  $k \geq 0$  a tyto parametry jsou jednoznačné.  $\Rightarrow$  kanonický tvar

Důkaz. Existenci máme, jednoznačnost uvidíme dle dlejší věty.  $\square$

$$q = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} \Rightarrow \mathbb{Z}/q = \mathbb{Z}/p_1^{t_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{t_s}$$

Věta. Každá konečně generovaná abelovská grupa je izomorfní  $\mathbb{Z}/p_1^{t_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{t_s} \times \mathbb{Z}^k$  kde  $p_1, \dots, p_s$  jsou prvočísla,  $t_1, \dots, t_s \geq 1$ ,  $k \geq 0$  a tyto parametry jsou jednoznačné.  $\Rightarrow$  kanonický tvar

Důkaz. Existenci opět máme. Jednoznačnost:

$$M = \mathbb{Z}/p_1^{t_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{t_s} \times \mathbb{Z}^k$$

$$\Rightarrow M/p \cdot M = \prod_{p_i=p} \mathbb{Z}/p \times (\mathbb{Z}/p)^k$$

$$p \cdot M / p^2 \cdot M = \prod_{\substack{p_i=p \\ t_i \geq 2}} \mathbb{Z}/p \times (\mathbb{Z}/p)^k$$

$$p^{t-1} \cdot M / p^t \cdot M = \prod_{\substack{p_i=p \\ t_i \geq t}} \mathbb{Z}/p \times (\mathbb{Z}/p)^k$$

$$\mathbb{Z}/q^t / p \cdot \mathbb{Z}/q^t = 0$$

$\uparrow$   $p$  invertibilní modulo  $q^t$   
 $\Rightarrow p \cdot \mathbb{Z}/q^t = \mathbb{Z}/q^t$

rozpozit všechna prvočísla  $p_i$   
 a všechny exponenty  $t_i$   
 a tedy  $k = \text{rk } M$   
 Ltzv. **řád**  $M$ .

Jednoznačnost v první větě: podobně nebo jako důsledek jednozn. zde.  $\square$

Příklad. Určete SNF celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 51 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 21 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 21 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{SNF}$$

$\xleftarrow{(-1) \times}$        $\xleftarrow{(-1) \times}$        $\xleftarrow{(-2) \times}$

Příklad. Určete SNF celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

← SNF

