Kuželosečky a kvadriky

– vezmeme velmi prakticky – nad $\mathbb{R}$ ← $A_n = \{(1, x^1, \dots, x^n)\}$

Def. Nadkvadrika $Q \subseteq A_n$ je množina všech bodů $(1, x^1, \dots, x^n) \in A_n$ splňujících rovnici tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x^i + a_{00} = 0 \qquad (Aff)$$

Př. $x^2 + y^2 = 1$
$y = x^2$
atd.

kde a_{ij}, a_{i0}, a_{00} jsou libovolné reálné koeficienty, $a_{ij} = a_{ji}$, ne všechna nulová (tj. kvadratický člen nenulový)

Pozn. Z teoretického hlediska je výhodnější uvažovat i komplexní řešení. Pak tato množina řešení určuje rovnici (Aff) jednoznačně až na nenulový násobek.

→ $x^2 + y^2 = -1$
$x^2 = -1$
– obě mají množinu řešení prázdnou

$n=2$: kuželosečka
$n=3$: kvadrika

projektivní rozšíření
$\overline{A_n} = A_n \sqcup \nu(A_n)$
$(0 : x^1 : \dots : x^n)$
∞ ve směru $(0, x^1, \dots, x^n)$
$\overline{A_n} = P_n$

Projektivní rozšíření nadkvadriky

Zabývejme se tím, kdy bod $(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \overline{A_n}$ leží na Q. Samozřejmě musí být vlastní, tj. $x^0 \neq 0$. Pak odpovídá bodu afinního prostoru A_n

$$(x^0 : x^1 : \dots : x^n) = \left(1 : \frac{x^1}{x^0} : \dots : \frac{x^n}{x^0}\right) = (1, x^1/x^0, \dots, x^n/x^0)$$

a v Q leží právě tehdy, když splňuje rovnici (Aff), tj.

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{x^i}{x^0} \frac{x^j}{x^0} + 2 \sum_i a_{i0} \frac{x^i}{x^0} + a_{00} = 0 \qquad / \cdot x^0 x^0$$

$$\sum_{ij} a_{ij} x^i x^j + \underbrace{2 \sum a_{i0}}_{2a_{i0} = a_{i0} + a_{0i}} x^i x^0 + a_{00} x^0 x^0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i x^j = 0$$

Def. Nadkvadrika $\overline{Q} \subseteq P_n$ je množina všech bodů $(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in P_n$ splňujících rovnici tvaru

$(kx^0 : kx^1 : \dots : kx^n)$? rovnice je homogenní → nezávisí na volbě souřadnic

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i x^j = 0 \qquad (Proj)$$

$\sum a_{ij} (kx^i)(kx^j) = 0$
$k^2 \cdot \sum a_{ij} x^i x^j = 0$

kde a_{ij} jsou libovolné reálné koeficienty, $a_{ij} = a_{ji}$, ne všechna nulová.

$\Rightarrow$ Pro afinní nadkvadriku Q zadanou (Aff) jsme zkonstruovali projektivní nadkvadriku $\overline{Q}$ zadanou (Proj) tak, že

$$Q = A_n \cap \overline{Q}$$

tj. body Q jsou právě vlastní body $\overline{Q}$

$\Rightarrow$ $\overline{Q}$ nazýváme **projektivní rozšíření** afinní nadkvadriky Q

Př. Parabola $Q: 2 \cdot x^2 - (x^1)^2 = 0$ v A_2 má proj. rozš. – lze přímo, viz cvičení

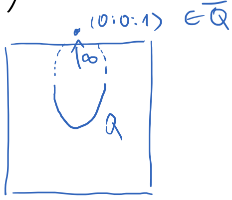
Př. Parabola $Q: 2\cdot x^2 - (x^1)^2 = 0$ v A_2 má proj. rozš.
lze přímo, viz cvičení

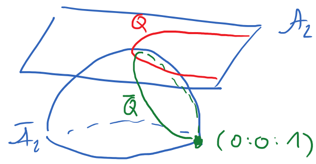
$$2\cdot\frac{x^2}{x^0} - \left(\frac{x^1}{x^0}\right)^2 = 0 \rightsquigarrow \overline{Q}: 2x^0x^2 - (x^1)^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x^0 & x^1 & x^2 \\ \hline x^0 & 0 & 0 & 1 \\ x^1 & 0 & -1 & 0 \\ x^2 & 1 & 0 & 0 \end{array} = A \quad 2 \quad \begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0\end{pmatrix} \quad 2 \quad \begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

$\overline{Q}$ obsahuje navíc body s $x^0 = 0$:
$-(x^1)^2 = 0$ tj. $x^1 = 0$, x^2 může být libovolné
$\Rightarrow$ jediný bod $(0:0:1) \in \overline{Q} \setminus Q$ (viz cvičení).

$2\cdot x^2 = (x^1)^2$





Projektivní nadkvadrika $\overline{Q}$ (a i ta afinní Q) je tedy zadaná sym. bil. formou (a_{ij}), označme ji f. Tedy $\overline{Q} = \{[x] \mid f(x,x) = 0\}$.
A // $\qquad q(x) = 0$
– přísl. kvadr. forma q

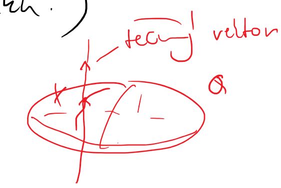
Pozn. Pokud bychom uvažovali i komplexní řešení, bude bilineární forma f a kvadratická forma určena jednoznačně až na násobek. Bude pak následující definice zcela korektní.

Definice. Řekneme, že dva body $[x], [y] \in P_n$ jsou polárně sdružené vzhledem ke $\overline{Q}$, jestliže platí $f(x,y) = 0$. (Zjevně nezávisí na volbě reprezentanta.) $f(kx,y) = k f(x,y)$

Jde o jistou formu kolmosti (vzhledem k f), budeme značit $[x] \pitchfork [y]$

Spoustu geometrických vlastností vyjádříme pomocí pol. sdr. $\pitchfork$:
$[x] \in Q \iff [x] \pitchfork [x]$. – protože $[x] \in Q \iff f(x,x) = 0$ $\Rightarrow X \in X^\pitchfork$

Definice. Polární doplněk bodu X je $X^\pitchfork = \{Y \mid X \pitchfork Y\}$. Pokud $X \in Q$ nazýváme tento polární doplněk $X^\pitchfork$ tečným prostorem Q v bodě X.
(Cv. Dokažte, že je tato definice geometricky v pořádku.)



$f(x,y) = x^T A y \Rightarrow$ (Proj): $(x^0, x^1, \dots, x^n)\, A \begin{pmatrix}x^0\\x^1\\\vdots\\x^n\end{pmatrix} = 0$

A je matice f

(Aff): $(1, x^1, \dots, x^n)\, A \begin{pmatrix}1\\x^1\\\vdots\\x^n\end{pmatrix} = 0$

Připomeňme: $a_{ij} = e_i^T A e_j = f(e_i, e_j)$ ← hodnoty sym. bil. formy f na dvojicích bázových vektorů

Vyjádření v afinní bázi

std báze $\mathbb{R}^{n+1}$: $(E_0, e_1, \dots, e_n)$; $(1,0,\dots,0)$ bod souř.; $e_i = (0,0,\dots,1,\dots,0)$ vektor souř.

$P \in A_n$ vyjádříme v bázi $(E_0', e_1', \dots, e_n')$:

$$P = (E_0', e_1', \dots, e_n')\begin{pmatrix}1\\x'^1\\\vdots\\x'^n\end{pmatrix}$$

Potom $f(P,P) = (1, x'^1, \dots, x'^n)\underbrace{\begin{pmatrix}E_0'\\e_1'\\\vdots\\e_n'\end{pmatrix} A\, (E_0', e_1', \dots, e_n')}_{A' = (f(e_i', e_j'))}\begin{pmatrix}1\\x'^1\\\vdots\\x'^n\end{pmatrix}$

// 0 ↖ rovnice Q

V P_2 je Cv. kružnice = hyperbola = parabola

$A' = (f(e_i', e_j'))$

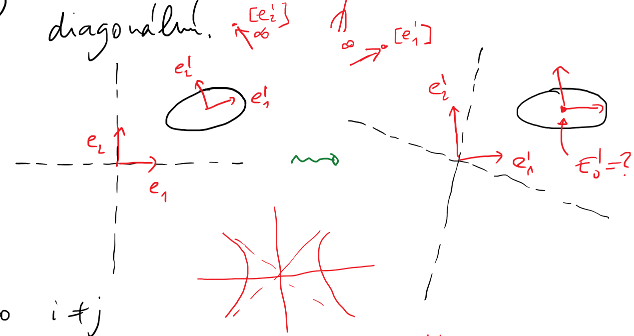
Myšlenka klasifikace. Vhodnou volbou afinní báze $(E_0', e_1', \dots, e_n')$ se budeme snažit zjednodušit rovnici (Aff); dále nás pak bude zajímat jednoznačnost.

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} f(E_0',E_0') & f(E_0',e_1') & \cdots & f(E_0',e_n') \\ \hline f(e_1',E_0') & f(e_1',e_1') & \cdots & f(e_1',e_n') \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n',E_0') & f(e_n',e_1') & \cdots & f(e_n',e_n') \end{array}\right)$$

zúžení f na $\mathrm{Dir}\, \mathcal{A}_n$
$\parallel$
$[e_1, \dots, e_n]$

Prvně zjednodušíme vyznačený blok $n \times n$. To už umíme pomocí ortogonální diagonalizace. Zvolíme tedy ortonormální bázi $\mathrm{Dir}\, \mathcal{A}_n$ takovou, že v ní tento blok bude diagonální.

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} f(E_0',E_0') & f(E_0',e_1') & \cdots & f(E_0',e_n') \\ \hline f(e_1',E_0') & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ f(e_1',E_0') & 0 & & \lambda_n \end{array}\right)$$



Směry $[e_i']$ splňují $[e_i'] \pitchfork [e_j']$ pro $i \neq j$
tj. $[e_i'] \pitchfork [e_i']^\perp$ ← definice tzv. hlavního směru

Další zjednodušení – zbavíme se lin. členů; ne vždy to ale lze.
– ekvivalentně $f(E_0', e_i') = 0$, tj. $E_0' \pitchfork [e_i']$
(neboli $E_0' \pitchfork \nu(\mathcal{A}_n)$)

Definice. Střed nadkvadriky $Q \subseteq \mathcal{A}_n$ (afinní pojem) je bod $S \in \overline{\mathcal{A}_n}$ t.ž. $S \pitchfork \nu(\mathcal{A}_n)$
tj. $S \in \nu(\mathcal{A}_n)^{\pitchfork}$.
$S \pitchfork [e_1], \dots, S \pitchfork [e_n]$

Pozn. Střed vždy existuje, ale nemusí existovat vlastní střed.
Pokud ex. vlastní střed, nazveme Q středovou nadkvadrikou.

Početně: Řešíme soustavu n lin. rovnic $f(e_1, S) = 0, \dots, f(e_n, S) = 0$
– ta je daná posledními n řádky matice A ... ale chceme $x^0 = 1$!
n rovnic pro $n+1$ nezn. $x^0, x^1, \dots, x^n$ ⇒ nenulové řešení ex. $x^0 \neq 0$?

⤳ Je-li Q středová, zvolme za počátek E_0' libovolný vlastní střed, pak v afinní bázi $(E_0', e_1', \dots, e_n')$ bude mít Q matici

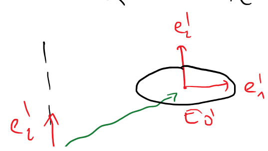
$f(e_i, S) = 0$
$e_i^T A S = 0$
i-tý řádek A

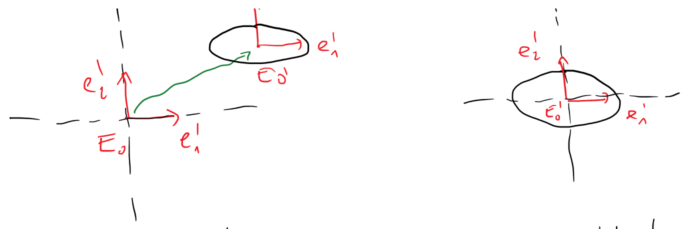
$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00}' & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{array}\right) \qquad \text{kde } a_{00}' = f(E_0', E_0')$$

a tedy rovnici

$(x^1)^2$ v homogenních souř.
$\parallel$
1 v afinních souř.

$$Q: \quad \lambda_1 (x^1)^2 + \dots + \lambda_n (x^n)^2 + a_{00}' = 0$$





Pro kuželosečky, tedy pro $n=2$, dostáváme případy:

- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 1$ elipsa
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 1$ hyperbola
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 0$ různoběžky $\frac{x^1}{a^1} = \pm \frac{x^2}{a^2}$
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 = 1$ rovnoběžky $\frac{x^1}{a^1} = \pm 1$
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 = 0$ dvojnásobná přímka $\frac{x^1}{a^1} = 0$

- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = -1$ imaginární elipsa
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 0$ imag. různoběžky
- $\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 = -1$ imag. rovnoběžky

$[a^1, a^2]$, $[a^1, -a^2]$, $[a^1, 0]$

Zbývá případ nestředových nadkvadrik, budeme řešit pouze pro kuželosečky

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|cc} * & * & p \\ \hline * & \lambda & 0 \\ p & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\leftarrow$ z neex. vlastního středu plyne
- hodnost matice 2×2 je 1 (nemůže být 0)
- hodnost matice 2×3 je 2

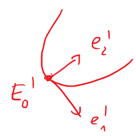
$\Rightarrow p \neq 0$

soustava pro vl. střed: $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & -* \\ 0 & 0 & -p \end{array}\right)$

Pokusíme se vynulovat všechny $*$:

Definice. Bod $V \in A_n$ se nazývá **vrchol**, jestliže
- $V \in Q$, tj. $V \pitchfork V$ $\leftarrow f(v,v) = 0$
- V je polárně sdružen se všemi regulárními hlavními směry, tj. $[e'_1] \pitchfork V$ (nebudeme definovat, ale odpovídají nenulovým řádkům matice A', od $n=3$ trochu složitější)

$f(e'_1, v) = 0$



$\rightsquigarrow$ Vrchol nestředových nadkvadrik vždy existuje (nebudeme ukazovat), zvolíme-li za počátek E'_0 lib. vrchol, pak v afinní bázi (E'_0, e'_1, e'_2) bude mít Q matici

$$A' = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & p \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ p & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$V \pitchfork V$

$[e'_1] \pitchfork V$

a tedy rovnici
$$Q: \lambda \cdot (x^{1\prime})^2 + 2p \cdot x^{2\prime} = 0 \rightsquigarrow \text{parabola}$$

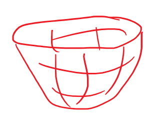
$\rightsquigarrow$ $\left(\frac{x^{1\prime}}{a^1}\right)^2 + 2x^{2\prime} = 0$ vydělením p, příp. $x^{2\prime} \rightsquigarrow -x^{2\prime}$

$\rightarrow$ rovnice má nulový kvadr. člen

Pro $n \geq 3$ je situace o něco složitější.

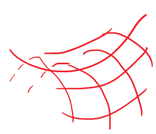
typy:

$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 + 2x^3 = 0$



el. paraboloid

$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 + 2x^3 = 0$



hyp. parab. = sedlová plocha

$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + 2x^3 = 0$

parabolická

parabolická
válcová plocha