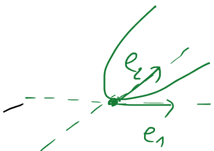
Kuželosečky – dodatek

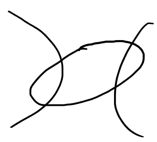
viděli jsme – převod na kanonický tvar v nějaké ortonormální afinní bázi $(0, e_1, e_2)$ ortonormální



Pozn. Každými 5 body v obecné poloze prochází jediná kuželosečka (5 = počet koeficientů rovnice minus 1). Dvě

≈ projektivní prostor prostoru rovnic ⟷ kužel.

kuželosečky se protínají ve 4 bodech (Bezoutova věta):



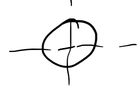
obecněji: křivky stupně m, n se protínají v $m \cdot n$ bodech

→ paradox: dvě kubické křivky se protínají v 9 bodech, ale na zadání kubické křivky je třeba bodů také 9 (navíc čtyři kubické) ... průsečíky nejsou v ob. pol.

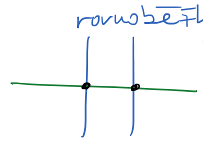
koef. $1, x, y, x^2, xy, y^2$
x^3, x^2y, xy^2, y^3

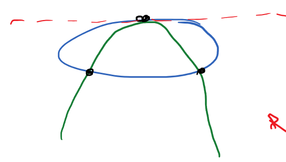
kvadratické rovnice $\xleftrightarrow{\text{nad } \mathbb{C}}$ kuželosečky

$x^2+y^2-1=0$



soustavy kvadr. rovnic ⟷ ???





pořád 4 průsečíky, ale některé násobné

soustavy lin. rovnic

– homogenní ⟷ vekt. podpr.
← ?

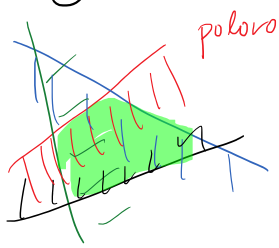
– nehomogenní ⟷ afinní podpr.
← ?

rovnice $f(x)=0$ ⟷ uz. podmn.
∟ spojitá, hladká
‟ ex. derivace všech řádů

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)=0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ uz.

$f(x_n)=0$
$f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$

dále lin. nerovnice a jejich soustavy ⟷ „polyedry"



Univerzální vlastnost báze

co je to báze

$$A_n \xrightarrow{\cong} A$$

$$(x^1,\dots,x^n) \longmapsto 0 + e_1\cdot x^1 + \dots + e_n \cdot x^n = (0, e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}1\\ x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

báze

$\alpha : \mathbb{k}^n \xrightarrow{\cong} V$ → izomorfismus $\alpha : \mathbb{k}^n \to V$

$e_i^{std} \longmapsto e_i$

inverze $V \to \mathbb{k}^n$ ... souřadnice

$v \longmapsto (v)_\alpha$

$$\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} \longmapsto e_1 x^1 + \dots + e_n x^n = (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

$\alpha = (e_1 \cdots e_n)$

transformace souřadnic

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "(\ )_\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, "(\ )_\beta", "\cong"'] & \\ \mathbb{k}^n \arrow[rr, "\cong", "(id)_{\beta\alpha}"'] & & \mathbb{k}^n \end{tikzcd}$$

univ. vlastnost zdarma:

každé zobrazení $\{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{f_0} W$

se jednoznačně rozšiřuje na lin. zobr. $V \xrightarrow{f} W$

— z druhé strany: lin. zobr. $V \xrightarrow{f} W$ je jedn. určeno libovolnými svými hodnotami na vektorech báze.

$$\begin{tikzcd} \{e_i\} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

$e_i \xmapsto{f_0} w_i$

$f(e_i) = w_i$

$\forall f_0\ \exists! f$ t.ž. trojúhelník komutuje ⇒ $f|_{\{e_i\}} = f_0$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "k"] \\ \cdot \arrow[r, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

komutuje ⟺ $g \circ f = k \circ h$

→ funguje to i naopak

Věta. Vektory $v_1,\dots,v_n$ tvoří bázi, jestliže se každé zobrazení $\{v_1,\dots,v_n\} \to W$ jednoznačně rozšiřuje na lin. zobr. $V \to W$.

Důkaz.

$$\begin{tikzcd} \{e_1^{std},\dots,e_n^{std}\} \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, hook] & \{v_1,\dots,v_n\} \arrow[d, hook] \\ \mathbb{k}^n \arrow[r, dashed, shift left] & V \arrow[l, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

└ existují a jsou inverzní } z univ. vl.

$e_i^{std} \longmapsto v_i$ | $v_i \longmapsto e_i^{std}$

$\mathbb{k}^n \xrightarrow[\varphi]{\exists!} V$ | $V \xrightarrow[\psi]{\exists!} \mathbb{k}^n$

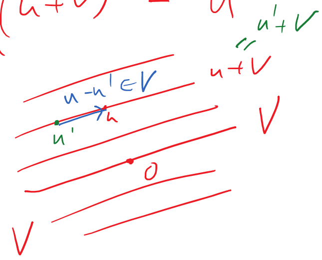
$\psi \circ \varphi = id$

$\varphi \circ \psi = id$

⇒ iso převádí $v_1,\dots,v_n$ na bázi $e_1^{std},\dots,e_n^{std}$ ⇒ je to báze. □

Faktorový prostor

$$\bigcup_{u\in U}(u+V) = U$$



Pokud $V \subseteq U$ je vektorový podprostor, jedná se zejména o normální podgrupu (vzhledem k $+$) a dostáváme faktorgrupu (kvocientovou grupu) $U/V = \{u+V \mid u \in U\}$

$$(u_1+V)+(u_2+V) \overset{def}{=} (u_1+u_2)+V$$

U/V opět komutativní grupa

násobení skaláry: $k\cdot(u+V) \overset{def}{=} ku+V$ (Cv. Dokažte korektnost.)

Definice / Věta. U/V s indukovanými operacemi $+,\cdot$ se nazývá faktorprostor (kvocientový prostor).

Univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr"'] & W \\ U/V \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\bar\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kanonická projekce $pr(u) = u+V$

$u \mapsto \varphi(u) = \bar\varphi(u+V)$, $u+V$

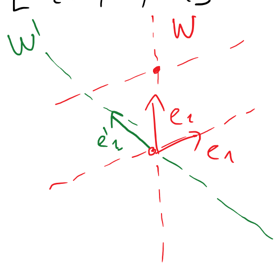
Je-li $\varphi: U \to W$ lin. zobr. splňující $\varphi(V)=0$, pak $\exists!$ lin. zobr. $\bar\varphi: U/V \to W$ t.ž. $\bar\varphi \circ pr = \varphi$.

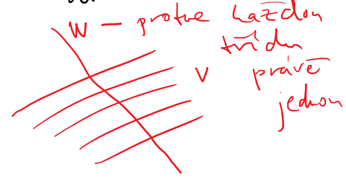
jednozn.: $\bar\varphi(u+V) = \varphi(u)$, $\bar\varphi(u'+V) = \varphi(u')$

$u-u' \in V \Rightarrow \varphi(u)-\varphi(u') \in \varphi(V)=0$

Cv. Je-li $W \subseteq U$ lib. komplementární podprostor, tj. $U = V \oplus W$, pak složení $W \xhookrightarrow{in} U \xrightarrow{pr} U/V$ je iso. ($w \mapsto w+V$)

Komplementární podpr. vždy existuje — nechť $V = [v_1, \dots, v_k]$ a doplníme $(v_1,\dots,v_k)$ do báze $(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n)$ prostoru U. Pak stačí vzít $W = [v_{k+1},\dots,v_n]$. Zejména $\dim U/V = \dim U - \dim V$.





$$\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$$
$$\dim U/V = \dim U - \dim V$$

Duální prostor

Definice. $\mathrm{Hom}(U,V) = \{\text{lin. zobr. } U \to V\}$ vektorový prostor

$(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u)+\psi(u)$ ... spousta axiomů

$(k\cdot\varphi)(u) = k\cdot\varphi(u)$

$(A+B)u = Au + Bu$

$(kA)u = k\cdot Au$

$\to$ prostor lin. zobr.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{k}^n,\mathbb{k}^m) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{k})$ – vektorový prostor

Definice. Duální prostor vektorového prostoru U je

$U^* = \mathrm{Hom}(U,\mathbb{k})$ $\leftarrow$ prvky = lin. zobr. $f: U\to\mathbb{k}$ = lineární formy na U

$f=0$ lin. fce

Věta (o duální bázi) Nechť $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$ je báze U. Potom n-tice lineárních forem $\alpha^*=(f^1,\dots,f^n)$ určených hodnotami na bázi

$$f^j(e_i) = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i=j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$e_1,\dots,e_n \in U$

$f^1,\dots,f^n \in U^*$

tvoří bázi duálního prostoru.

Důkaz. Nechť $\eta\in U^*$ je lib. lin. forma na U. Chceme ukázat, že ji lze jednoznačně napsat jako

$$\eta = \sum_i y_i\cdot f^i \iff \forall j:\ \eta(e_j) = \sum_i y_i\, f^i(e_j) = \sum_i y_i\cdot\delta^i_j = y_j$$

↑ má mít jediné řešení $y_1,\dots,y_n$ ... souřadnice η

↑ všechny členy 0 vyjma $y_j\cdot\delta^j_j = y_j\cdot 1$ □

Máme tedy jediné řešení $y_j = \eta(e_j)$ $\Rightarrow$ souřadnice formy $\eta\in U^*$ v bázi α^* jsou $(\eta(e_1),\dots,\eta(e_n))$

$\to$ budeme je zapisovat do řádku !

Souřadnice vektoru $u\in U$: $u = \sum_j x^j\cdot e_j$

$$\Rightarrow f^i(u) = \sum_j x^j\cdot f^i(e_j) = x^i \Rightarrow \text{souř. jsou } (f^1(u),\dots,f^n(u))^T$$

$\hookrightarrow$ $f^i(u)$ = i-tá souř. u ... f^i je i-tá souřadnicová funkce

Příklad. $\mathbb{k}^n$ má duální prostor $(\mathbb{k}^n)^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{k}^n,\mathbb{k}) = \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{k})$

$\to$ to je důvod, proč souřadnice forem píšeme do řádků

$$\eta\in(\mathbb{k}^n)^*,\ u\in\mathbb{k}^n \Rightarrow \eta(u) = \eta\cdot u = (\eta_1 \cdots \eta_n)\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^n\end{pmatrix} = \eta_1 u^1+\dots+\eta_n u^n$$

Podmínka duality mezi $(e_1,\dots,e_n)$ a $(f^1,\dots,f^n)$:

$(f^i(e_j)) = (\delta^i_j)$ $\leftarrow$ jsou to matice, vpravo E

$$\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}f^1\\ \vdots\\ f^n\end{pmatrix}}\underset{1\times n}{(e_1\cdots e_n)} = \begin{pmatrix}f^1(e_1) & \cdots & f^n(e_1)\\ \vdots & & \vdots\\ f^n(e_1) & \cdots & f^n(e_n)\end{pmatrix} = E$$

$$\begin{pmatrix}f^1\\ f^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(e_1\ e_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Budeme značit $\eta(u) = (\eta,u)_U = (\eta,u)$

$$U^*\times U \xrightarrow{(\ ,\ )_U} \mathbb{k}$$

$$(\eta,u) \longmapsto \eta(u)$$

„párování"

dualita pomocí párování: $(f^i,e_j) = \delta^i_j$ sym. role α^*,α

Nechť $u\in U$. Pak $(-,u): U^*\to\mathbb{k}$ je lin. forma na U^*, tj. prvek $(U^*)^*$ $\overset{\shortparallel}{E}(u)$ ... „evaluace" v u : $\eta \mapsto \eta(u)$

Věta (o druhém duálu) Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Pak zobrazení

$$E: U \to (U^*)^*, \qquad u \mapsto (-,u)$$

je izomorfismus. Budeme proto $U, (U^*)^*$ v tomto případě ztotožňovat.

Důkaz. Ukážeme, že pro bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ prostoru U budou obrazy $(E(e_1), \dots, E(e_n))$ tvořit bázi $(U^*)^*$, konkrétně duální bázi k duální bázi $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$:

$(e_1, \dots, e_n)$ báze U
$(f^1, \dots, f^n)$ báze U^*
? $(E(e_1), \dots, E(e_n))$ báze $(U^*)^*$

$$\overset{(-,e_i)}{E(e_i)}(f^j) \overset{(-,e_i)(f^j) = (f^j, e_i) = \delta^j_i}{=} f^j(e_i) = \delta^j_i \quad \checkmark$$

$\square$

Duální lineární zobrazení

$\varphi : U \to V$ indukuje $\varphi^* : V^* \to U^*$
$\theta \mapsto \theta \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta\circ\varphi = \varphi^*(\theta)"'] & V \arrow[d, "\theta"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Pomocí párování:

$$(\varphi^*(\theta), u) = (\theta \circ \varphi, u) = \theta \circ \varphi(u) = \theta(\varphi(u)) = (\theta, \varphi(u))$$

Duální prostor a skalární součin.

$U^* \cong U$ — mají stejné dimenze
— nekanonicky — izomorfismů je víc, žádný není lepší
— prvky není dobré ztotožňovat

U v.p. se skalárním součinem $U \times U \to \mathbb{R}$ $\quad U \underset{\cong}{\overset{\cong}{\rightleftarrows}} U^*$

$R: U \longrightarrow U^*$ je izo — stejné dimenze
$u \longmapsto \langle u, - \rangle$ — ker = ? : $\langle u, - \rangle = 0$
$v \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$
$\Rightarrow u = 0$

Lze použít k identifikaci $U^* \cong U$. Párování pak bude:

$$\begin{tikzcd} U^* \times U \arrow[r, "(\,,\,)_U"] & \mathbb{R} \\ U \times U \arrow[u, "R\times id"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\langle u,- \rangle, v) \arrow[r, mapsto] & \langle u, v \rangle \\ (u,v) \arrow[u, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

$R: U \to U^*$ konkr. pro $U = \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$
$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto (x^1, \dots, x^n)$

Dualita a podprostory.

rovnice $\longleftrightarrow$ řešení
? $\longleftarrow$ $V \subseteq U$
$\eta = 0$

„$\langle \eta, v \rangle = 0$"

$V \subseteq U \Rightarrow V \subseteq U^*$ definováno: $V^\perp = \{\eta \in U^* \mid \underbrace{\forall v \in V : (\eta, v) = 0}_{\eta \perp V}\}$

tj. lin. rce $\eta = 0$ splněné na V

$W \subseteq U^* \Rightarrow W^\perp \subseteq U$ definováno: $W^\perp = \{u \in U \mid \underbrace{\forall \theta \in W : (\theta, u) = 0}\}$

L₀ řešení soustavy $\theta = 0$, $\theta \in W$ $\qquad W \perp U$

$$\{\text{podprostory } U\} \underset{(\,)^\perp}{\overset{(\,)^\perp}{\rightleftarrows}} \{\text{podprostory } U^*\} \qquad U^* \times U \to \mathbb{k}$$

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní a

- převrací uspořádání $\leftarrow$ $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow V_1^\perp \supseteq V_2^\perp$
- $\dim V^\perp = n - \dim V$
- $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$
- $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$

Důkaz. Podstatné jsou dimenze, pak $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ budou mít stejné dimenze $\Rightarrow$ budou totožné a zbytek bude jasný.

$$V^\perp = \ker\left(U^* \xrightarrow{res} V^*\right) \qquad \text{surj. zobr., dimenze } n, k$$
$$\eta \longmapsto \eta|_V \qquad \Rightarrow \dim \ker = n-k \qquad \square$$

Tvrzení. Nechť $\eta^1, \dots, \eta^k, \eta \in U^*$. Potom rovnice $\eta = 0$ plyne ze soustavy rovnic $\eta^1 = 0, \dots, \eta^k = 0$, právě když η je lin. kombinací $\eta^1, \dots, \eta^k$:

$$\left(\forall v \in V:\ \eta^1(v) = 0, \dots, \eta^k(v) = 0 \Rightarrow \eta(v) = 0\right) \overset{(\Leftarrow)}{\Longrightarrow} \eta \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$$

Důkaz. $\uparrow$ toto znamená $[\eta^1, \dots, \eta^k]^\perp \subseteq [\eta]^\perp$ – řešení $\eta = 0$

L řešení soustavy $\eta^1 = 0, \dots, \eta^k = 0$

Aplikací $(\,)^\perp$ dostaneme zpátky $\eta \in [\eta] \subseteq [\eta^1, \dots, \eta^k]$. $\square$

Podobnou teorii bychom mohli vytvořit pro nehomogenní lineární rovnice (pomocí $A_n \subseteq \mathbb{k}^{n+1}$ a redukcí na homogenní lin. rovnice na $\mathbb{k}^{n+1}$), uvedeme ale pouze jednu pěknou aplikaci.

Věta. Soustava lin. rovnic $Ax + b = 0$ nemá řešení, právě když existuje lin. kombinace jejích řádků tvaru $1 = 0$.

Důkaz. Homogenizace soustavy je $Ax + bx^0 = 0$ a pomocí ní se neřešitelnost napíše snadno: $Ax + bx^0 = 0 \Rightarrow x^0 = 0$

Podle předchozího tvrzení to pak znamená, že x^0 je lin. kombinací řádků v $Ax + bx^0 \overset{x^0=1}{\Longrightarrow} 1$ je lin. komb. řádků v $Ax + b$. $\square$