Polyedry – připomenutí

- Polyedr P zadán soustavou lin. nerovnic $Ax \geq b$
  ekvivalentně $P = \text{conv}\, X + \text{cone}\, V$
  └ nezáporné kombinace vektorů
  └ konvexní kombinace bodů
- Stěny polyedru P dané nahrazením některých nerovnic v systému $Ax \geq b$ rovnicemi $F = \{Ax \geq b,\ A'x = b'\}$
- Minimální stěny: nerovnice z $Ax \geq b$ nejsou potřeba, takže $F = \{A'x = b'\}$
- Bodovaný polyedr: minimální stěny jsou body → vrcholy
- Příklad: $P = \{Ax = b,\ x \geq 0\}$ je bodovaný, vrcholy jsou dány podsystém $x \geq 0$, tj. $\{x^i \geq 0,\ i \in L\} = \{x_L \geq 0\}$
  → $V = \{Ax = b,\ x^L = 0\}$ lze vybrat nezávislé rovnice
  pak $\text{rk}\, A = \text{row-dim}\, A = k$, $|L| = n - k$.

Lineární programování

$$\min\{\underbrace{cx}_{\text{lin. fce}} \mid \underbrace{Ax \geq b}_{\text{polyedr}}\}$$

$$A_n \xrightarrow{c} \mathbb{R}$$

$\cup|$

$P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cone} V$ — zdola neomezená / min. ex.

$\Uparrow$

$cP = \underbrace{\operatorname{conv} cX}_{\text{omezený interval}} + \underbrace{\operatorname{cone} cV}_{0/\mathbb{R}_+/\mathbb{R}_-/\mathbb{R}} \leftarrow$ interval

Pokud $\min = \delta$, pak nastává na množině

$P \cap \{cx = \delta\} \leftarrow$ stěna (protože $cx \geq \delta$ na P)

Pokud je P bodovaný, obsahuje každá stěna vrchol (min. stěna).
simplexová metoda – chytré prohledávání vrcholů $\rightarrow$ min

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} \underset{x = x_+ - x_-}{=} \min\{cx_+ - cx_- \mid Ax_+ - Ax_- \geq b,\ x_+ \geq 0,\ x_- \geq 0\}$$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} \underset{s = Ax - b}{=} \min\{cx \mid Ax - s = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\}$ je úloha lin. progr. — dále se bude hodit $b \geq 0$ toho lze dosáhnout případným násobením řádků (-1)

Příklad.

	1	1	−4	2	≥	4	→	$-x^5$
	−3	1	−2	0	≤	6	→	$+x^6$
	0	1	0	−1	=	−1	→	$/\cdot(-1)$
	1	1	−1	0	=	0		
max:	−3	2	−1	4			→	$/\cdot(-1)$
	lib	lib	≥0	≥0				
	↓	↓						
	$x^1_+ - x^1_-$	$x^2_+ - x^2_-$						

	1	−1	1	−1	−4	2	−1	0	4
	−3	3	1	−1	−2	0	0	1	6
	0	0	−1	+1	0	+1	0	0	+1
	1	−1	1	−1	−1	0	0	0	0
min:	3	−3	−2	2	1	−4	0	0	0

Dualita

Věta. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}$

infimum = max. dolní závora

Důkaz. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{\delta \mid cx \geq \delta$ platí na $P: Ax \geq b\}$

$= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0 : \underbrace{c = yA,\ \delta = yb}_{(c \mid \delta) = y\cdot(A \mid b)}\}$

$= \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}.$ $\square$

Symetrická verze:

$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA,\ y \geq 0\}$

Simplexová metoda:

Pro simplexovou metodu budeme předpokládat tvar

$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\}$ – prvky jsou tzv. přípustná řešení

a dále: hodnost A = počet řádků $A = k$

$\Rightarrow$ vrcholy jsou popsány podmnožinami $L \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|L| = n-k$, K – doplněk

totiž $Ax = b,\ x_L = 0$

souřadnice s indexy z L

soustavu $Ax = b$ lze přepsat do ekvivalentního tvaru

$r(\ ) = n \begin{cases} (A_K \mid A_L \mid b) \\ (0 \mid E \mid 0) \end{cases} \sim (E \mid \bar{A}_L \mid \bar{b}) \Rightarrow x_K = \bar{b} - \bar{A}_L x_L$

$\Downarrow$ A_K regulární

$\rightsquigarrow$ odpovídá vrcholu $\begin{array}{cc} x_K & x_L \\ (\bar{b} & 0) \end{array}$

$x_L = 0 \Rightarrow x_K = \bar{b}$

$\Rightarrow$ vyjádříme funkci cx na polyedru přípustných řešení pomocí $x_K = \bar{b} - \bar{A}_L x_L$ jako $c(x_K, x_L) = c(\bar{b} - \bar{A}_L x_L, x_L) = c_L(x_L)$

Lemma. Jsou-li ve vyjádření c_L všechny koeficienty nezáporné, je vrchol $(\bar{b}; 0)$ optimálním řešením, tj. bodem, kde nastává min. $\square$

Předpokládejme tedy, že koef. u x^q, $q \in L$, je záporný

a uvažme $\{Ax = b, x \geq 0\} \cap \{x_{L \setminus q} = 0\}$ – je to stěna dimenze 1

nebo 0, protože se jedná o polyedr v $\{Ax = b,\ x_{L\setminus q} = 0\}$ ← dim 1

$(E \mid \bar{A}_L \mid \bar{b}) = \left(E \,\middle|\, \begin{matrix} \bar{a}_{1q} \\ \vdots \\ \bar{a}_{kq} \end{matrix} \,\middle|\, \bar{A}_{L\setminus q} \,\middle|\, \bar{b}\right)$ __hrana:__

$x^1 + \bar{a}_{1q}x^q + 0 = \bar{\beta}^1$

$\vdots$

$x^k + \bar{a}_{kq}x^q + 0 = \bar{\beta}^k$ $\quad x \geq 0$

$x_{L\setminus q} = 0$

Lemma. Pokud jsou všechna $\bar{a}_{iq} \leq 0$, je tato hrana neomezená (x^q může být libovolně velké) a cx

podél této hrany klesá $\Rightarrow$ minimum neexistuje.

Důkaz. $x^i = \bar{\beta}^i - \bar{a}_{iq} x^q \geq 0$ pro libovolné $x^q \geq 0$. (protože $\bar{\beta}^i \geq 0$, je to souřadnice vrcholu) □

Naopak každá rovnice $x^i + \bar{a}_{iq} x^q = \bar{\beta}^i$ s $\bar{a}_{iq} > 0$ dá omezení

$$x^q = 1/\bar{a}_{iq} \, (\bar{\beta}^i - x^i) \leq 1/\bar{a}_{iq} \, \bar{\beta}^i = \bar{\beta}^i / \bar{a}_{iq}$$

↑ protože $x^i \geq 0$

Vezmeme index $p = i$ pro který je toto omezení $\bar{\beta}^i/\bar{a}_{iq}$ minimální.
To odpovídá druhému vrcholu hrany: bude mít

$$\underbrace{x_{L\setminus q} = 0, \; x^p = 0}_{x_{L\setminus q \cup p}} \qquad (\Rightarrow x^q = \bar{\beta}^p/\bar{a}_{pq})$$

$\Rightarrow$ nahrazením $L \rightsquigarrow L\setminus q \cup p$ dostaneme vrchol s menší hodnotou cx.
případně stejnou:

Poznámka. Ve skutečnosti se může stát, že $\bar{\beta}^p/\bar{a}_{pq} = 0$ a bude se jednat o stejný vrchol popsaný jinou indexovou množinou L. Algoritmus by se mohl zacyklit ... Blandovo pravidlo tomuto zamezuje $\rightsquigarrow$ volí se co nejmenší q a co nejmenší p ...

Příklad.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 48 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 60 \\ \hline -6 & \boxed{-14} & -13 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

vrchol $x^1 = x^2 = x^3 = 0$
hrana podél níž funkční hodnota klesá: $x^1 = x^3 = 0$
druhý vrchol daný: $x^4 = 0$
$\{1,2,3\} \to \{1,3,4\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 48 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 2 & 72 \\ \hline -5/2 & 0 & \boxed{-6} & 7 & 0 & 168 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 12 & 0 & 8 & -2 & 72 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 2 & 72 \\ \hline \boxed{-3/2} & 0 & 0 & 5 & 2 & 240 \end{array}\right) \sim$$

$\to \{1,4,5\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 12 & 0 & 8 & -2 & 72 \\ 0 & -12 & 12 & -12 & 6 & 72 \\ \hline 0 & 9 & 0 & 11 & 1/2 & 294 \end{array}\right)$$

$\to \{2,4,5\}$

$\longrightarrow$ jedná se o minimum $(36, 0, 6, 0, 0)$
s funkční hodnotou -294: $\left(\begin{array}{c|c} Ax-b & 0 \\ \hline cx-0 & 0 \end{array}\right)$

Začátek. Vysvětlili jsme jak zjistit, zda vrchol je optimálním řešením, případně zda optimum neexistuje, případně jak nalézt vrchol s menší hodnotou funkce cx. Zbývá nalézt počáteční vrchol. „začátek indukce"

V definiční soustavě

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

můžeme předpokládat $b \geq 0$.

Vyřešíme optimalizační problém s přidanými proměnnými $t^1, \dots, t^k$ „umělými"

$$\min \{ \mathbb{1}t \mid Ax + t = b,\ x \geq 0,\ t \geq 0 \}$$

$$t^1 + \dots + t^k = (1 \dots 1)\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ přípustné řešení (x,t) má: • $x \geq 0$ splňující $Ax \leq b$

• $t = b - Ax$ $\Rightarrow$

$\rightsquigarrow$ ex. příp. řešení $(0,b)$ & umíme začít

Lemma. $\min = 0 \iff$ původní úloha má přípustné řešení. $\square$

Pokud je min vskutku 0, můžeme dodatečnými úpravami dosáhnout popisu příslušného vrcholu pomocí množiny L odpovídající některým proměnným x^i a všem proměnným t^i. Zahozením umělých proměnných t^i pak získáme vrchol původního polyedru, popsaný právě těmi indexy z L odpovídajícím pův. prom.

Příklad. $c = (3 \ \ -3 \ \ -2 \ \ 2 \ \ 1 \ \ -4)$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
3 & -3 & -2 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\multicolumn{8}{c}{\overbrace{\hspace{8cm}}^{L}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{2.5cm}}^{K}}
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-2 & 2 & -1 & 1 & 5 & \boxed{-3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right)
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\dots
\end{array}\right) \sim$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 3 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & \boxed{-4} & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 3 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & -4 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
-4 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
2 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
-4 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-3} & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{5} & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & 4 \\
0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & 2 \\
\hline
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\
3 & -3 & -2 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-19/2} & 0 & -9/2 & 0 & & & & 13
\end{array}
$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-19/2} & 0 & -9/2 & 0 & & 13 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -19/2 & 0 & -9/2 & 0 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29/2 & 19/2 & 32 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ vrchol $(0\ 2\ 4\ 0\ 2\ 5\ \cancel{0}\ \cancel{0})$ je rovnou optimálním řešením.

$(-2\quad 4\quad 2\quad 5)$ optimum v původní úloze