# Tenzorový součin

**Připomenutí.** • $U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$ „druhý duál pro vk prostorů"

• $(e_i)$ báze $U$, $(\bar e_j)$ báze $V$ $\Rightarrow$ $(e_i\otimes \bar e_j)$ báze $U\otimes V$

• univerzální vlastnost

$$\begin{array}{ccc} (u,v) & U\times V & \xrightarrow[\text{bilin.}]{F} W \\ \downarrow & t \downarrow \text{bilin.} & \nearrow \exists!\,\varphi \text{ lin.} \\ u\otimes v & U\otimes V & \end{array}$$

formální lin. komb. prvků $U\times V$

$\Uparrow$ $\varphi$ jedn. určeno $F$, $F$ jedn. určeno $F(e_i,\bar e_j) = \varphi(e_i\otimes\bar e_j)$ $\Leftarrow$ $(e_i\otimes\bar e_j)$ je báze

Pozn. existují jiné konstrukce

$$\begin{array}{ccc} U\times V & \xrightarrow{F} & W \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \in \mathbb{k}\{U\times V\} & \nearrow \varphi & \\ \downarrow & & \\ \mathbb{k}\{U\times V\}/(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v) \text{ atd.} & & \end{array}$$

$\varphi$ ex. pro libovolné $F$

$\varphi$ ex. pokud $F$ je bilin.

• vztah k duálním prostorům:

$$V^*\otimes U^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k}) \cong (U\otimes V)^*$$
$$\theta\otimes\eta \longmapsto \theta\circ\eta$$

$\Rightarrow$ budeme ztotožňovat, takže můžeme zapomenout na $\circ$

$$\begin{array}{ccc} V^*\times U^* & \longrightarrow & \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ V^*\otimes U^* & & \end{array}$$

$(\theta,\eta)\longmapsto \theta\circ\eta$ korektní bilineární

+ báze na bázi $\bar f^j\otimes f^i \longmapsto \bar f^j\circ f^i$

$U^* \cong \mathbb{k}\otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(U,\mathbb{k})$

spec. případy: $V=\mathbb{k} \rightsquigarrow \mathbb{k}\otimes U^*\cong\mathrm{Hom}(U,\mathbb{k})$

$U=\mathbb{k} \rightsquigarrow V\otimes\mathbb{k}\cong\mathrm{Hom}(\mathbb{k},V)$, $(k\mapsto k\cdot v) \leftarrow v\in V$, $\cong V$

**Věta.** Je-li $U$ kon. dim., pak zobrazení
$$V\otimes U^* \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(U,V), \quad v\otimes\eta \longmapsto \big(v\cdot\eta : u\longmapsto v\cdot\eta(u)\big)$$
je izomorfismus.

$U\xrightarrow{\eta}\mathbb{k}\xrightarrow{v}V$, $k\longmapsto k\cdot v$

**Důkaz.** Nechť $\varphi\in\mathrm{Hom}(U,V)$ a hledejme vzor, ve tvaru
$$\sum_{i,j} a^i_j\cdot(\bar e_i\otimes f^j)$$
tedy hledáme koeficienty $a^i_j$ tak, aby
$$\sum_{i,j} a^i_j\,(\bar e_i\cdot f^j) = \varphi$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} a^i_j\,(\bar e_i\cdot f^j(e_s)) = \varphi(e_s)$$
$$\sum_i a^i_s\,\bar e_i = \varphi(e_s) \quad \xrightarrow{\bar f^r(\,)}$$
takže koeficienty existují jediné $\to$ $a^r_s$ = r-tá souřadnice $\varphi(e_s)$. □

v souřadnicích $\bar e_i\otimes f^j \longmapsto \bar e_i\cdot f^j = E^j_i$

$v\otimes\eta\longmapsto v\cdot\eta$ $\uparrow$ součin matic, $A=\sum_{ij} a^i_j E^j_i$

$U\xrightarrow{\eta}\mathbb{k}\xrightarrow{v}V$

$\mathbb{k}\xrightarrow{e_s}U\xrightarrow{\varphi}V\xrightarrow{\bar f^r}\mathbb{k}$

$a^r_s = \bar f^r(\varphi(e_s))$

**Poznámka.** Souřadnice $a^i_j$ jsou prvky matice zobrazení $\varphi$

horní index $i$ je řádkový index ... vektory $\begin{pmatrix} x^1\\ \vdots \\ x^n\end{pmatrix}$ (1.ř. ... n.ř.)

dolní index $j$ je sloupcový index ... formy $(y_1 \dots y_n)$ (1.s. ... n.s.)

**Poznámka.** Jednoduché tenzory $v\otimes\eta$ odpovídají zobrazením $v\cdot\eta$ hodnosti 1 (případně 0, pokud $v=0$ nebo $\eta=0$)

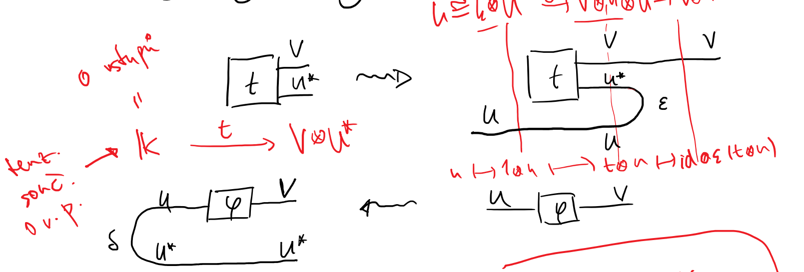
a těch moc není $\Rightarrow$ většina tenzorů není jednoduchých.

**Dualita.** Bilineární zobrazení $(\ ,\ )_U : U^* \times U \to \mathbb{k}$ indukuje lineární zobrazení $U^* \otimes U \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{k}$, podobně $id \in Hom(U,U) \cong U \otimes U^*$ indukuje lineární zobrazení $\mathbb{k} \xrightarrow{\delta} U \otimes U^*$. Pomocí nich lze izomorfismus

$$V \otimes U^* \cong Hom(U,V)$$

$\mathcal{E}$ $\delta = \sum \underbrace{\delta^i_j}_{\text{matice id}} e_i \otimes f^j = \sum e_i \otimes f^i = e_1 \otimes f^1 + \dots + e_n \otimes f^n$

hezky graficky reprezentovat $U \cong \mathbb{k} \otimes U \xrightarrow{t \otimes id} V \otimes U^* \otimes U \to V \otimes \mathbb{k} \cong V$ $id \otimes \varepsilon$



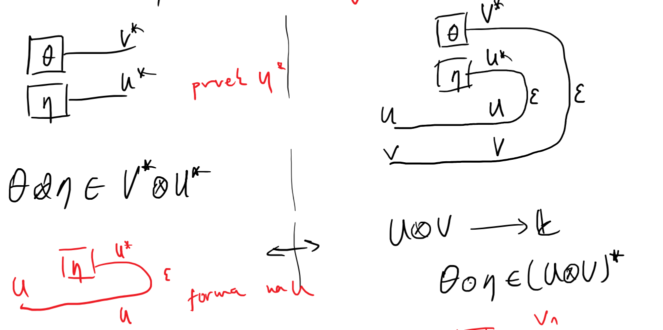

$\eta \in U^*$, $\theta \in V^*$

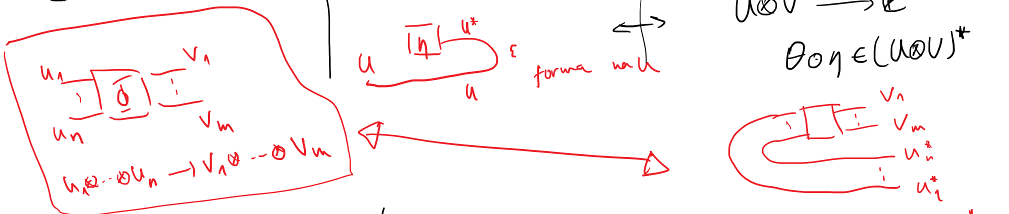
$\theta \otimes \eta \in V^* \otimes U^*$

$U \otimes V \to \mathbb{k}$

$\theta \circ \eta \in (U \otimes V)^*$

$U \otimes V \xrightarrow{\cong} V \otimes U$




## Souřadnice tenzorů.

Pro jednoduchost budeme pracovat s tenzorovými součiny $U, U^*$

$\to$ tenzorová algebra: $T^p_q U = \underbrace{\otimes^p U}_{U \otimes \dots \otimes U \ (p\times)} \otimes \otimes^q U^* \cong \underline{Hom(\otimes^q U, \otimes^p U)}$ NAOPAK NEŽ VE SKRIPTECH

prvky: tenzory typu $(p,q)$

Algebra? Něco víc než jen kolekce vektorových prostorů – máme součiny

$$T^{p_1}_{q_1} U \otimes T^{p_2}_{q_2} U \xrightarrow{\otimes} T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2} U \quad \longleftrightarrow \quad T^{p_1}_{q_1} U \times T^{p_2}_{q_2} \to T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2} U$$

bilineární

$T^1_1 U$ $\quad T^2_0 U$

$(u \otimes \eta\ ,\ v \otimes w) \mapsto u \otimes v \otimes w \otimes \eta \in T^3_1 U$

$$(\otimes^{p_1} U \otimes \otimes^{q_1} U^*) \otimes (\otimes^{p_2} U \otimes \otimes^{q_2} U^*)$$

$$\otimes^{p_1} U \otimes \otimes^{p_2} U \otimes \otimes^{q_1} U^* \otimes \otimes^{q_2} U^* \cong \otimes^{p_1+p_2} U \otimes \otimes^{q_1+q_2} U^*$$

**Definice.** Algebra = vektorový prostor $A$ + bilineární násobení $A \times A \to A$ takové, že $A$ společně se sčítáním a tímto násobením je okruh. $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$, $1 \cdot a = a = a \cdot 1$

**Příklady.**
- $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, obecněji libovolné rozšíření těles
- $\mathbb{H}$ nad $\mathbb{R}$ kvaterniony – v tomto předmětu
- $Mat_{n\times n}\, \mathbb{k}$ nad $\mathbb{k}$
- $\mathbb{k}[x]$ nad $\mathbb{k}$, $\mathbb{k}[X]$ nad $\mathbb{k}$

**Definice.** Graduovaná algebra = kolekce vektorových prostorů $(A_n)$ + bilineárních násobení $A_n \times A_m \to A_{n+m}$ splňujících axiomy okruhu ($n, m$ cokoliv – typicky $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$)

**Příklady.** • $\Bbbk^{(*)}[X] = (\Bbbk^{(n)}[X])$ = homogenní polynomy stupně $n$

• $T^*_* U = (T^p_q U)$ tenzorová algebra

a její varianty symetrická, vnější algebra, Cliffordova algebra (zobec. kvaternionů)

graduovaná algebra $\quad A=(A_n) \rightsquigarrow \operatorname{Tot} A = \bigoplus_n A_n$ algebra

$\Bbbk^{(*)}[x] \rightsquigarrow \Bbbk[x]$ ← formální konečné součty $a_0 + a_1 + \dots + a_r$ lib. délky

Nechť $U$ má bázi $(e_i)$, $U^*$ duální bázi $(f^j)$.

$t \in T^p_q U = \bigotimes^p U \otimes \bigotimes^q U^*$ --- báze $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \dots \otimes f^{j_1}$

$\Rightarrow$ jednoznačné vyjádření $\quad t = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}} t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \dots \otimes f^{j_1}$

↑ souřadnice tenzoru $t$ vzhledem k bázi $\alpha$

$T^p_q U$ — $p$ horních indexů, $q$ dolních indexů v souřadnicích $t$

Einsteinova sumační notace:

$t = t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \dots \otimes f^{j_1}$

**Příklady.**

• tenzory typu $(1,0)$ = vektory: $T^1_0 U = U$

$u = \sum u^i e_i$ klasické souřadnice $\qquad$ násobení matic

$u = (e_1 \dots e_n) \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$ $\qquad C = A \cdot B$, $\quad c^i_j = \sum_k a^i_k \cdot b^k_j$

• tenzory typu $(0,1)$ = lineární formy: $T^0_1 U = U^*$

$\eta = \sum \eta_j f^j$ klasické souřadnice $\qquad \eta = (\eta_1 \dots \eta_n) \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$

• tenzory typu $(0,2)$ = bilineární formy: $T^0_2 U = U^* \otimes U^* \cong (U \otimes U)^* = \operatorname{Lin}_2(U, U; \Bbbk)$

$g = \sum g_{jk} f^k \otimes f^j \quad \longleftrightarrow \quad \sum g_{jk} f^k \circ f^j$

$\Rightarrow g(u,v) = \sum g_{jk} f^j(u) f^k(v) = \sum g_{jk} u^j v^k \qquad (= u^T A v) \qquad u_j g^j{}_k v^k$

• tenzory typu $(1,1)$ = lineární zobrazení: $T^1_1 U = U \otimes U^* \cong \operatorname{Hom}(U,U)$

$\varphi = \sum \varphi^i_j e_i \otimes f^j \quad \longleftrightarrow \quad \sum \varphi^i_j e_i f^j$

$\Rightarrow \varphi(u) = \sum \varphi^i_j e_i f^j(u) = \sum \underbrace{\varphi^i_j u^j}_{} e_i$

souřadnice $\varphi(u)$ jsou $Au$

**Souřadnice tenzorů při změně báze.**

$\overset{\alpha}{(e_1 \dots e_n)} = \overset{\bar{\alpha}}{(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)} \cdot A \longrightarrow \boxed{e_k = \sum \bar{e}_i a^i_k}$

Jaký je vztah mezi duálními bázemi?

$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \vdots \\ \bar{f}^n \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{f^\ell = \sum b^\ell_j \bar{f}^j}$

Přitom:

$(f^1 \qquad\qquad (\bar{f}^1$

Přitom:

$$E = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (e_1 \cdots e_n) = B \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \vdots \\ \bar{f}^n \end{pmatrix} (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n) \; A = BA \implies \underline{\underline{B = A^{-1}}}$$

$$t = \sum t^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \; e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_p} \otimes f^{l_q} \otimes \cdots \otimes f^{l_1}$$

$$= \sum t^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \left(\sum \bar{e}_{i_1} a^{i_1}_{k_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum \bar{e}_{i_p} a^{i_p}_{k_p}\right) \otimes \left(\sum b^{l_q}_{j_q} f^{j_q}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum b^{l_1}_{j_1} f^{j_1}\right)$$

$$= \sum a^{i_1}_{k_1} \cdots a^{i_p}_{k_p} \; t^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \; b^{l_q}_{j_q} \cdots b^{l_1}_{j_1} \quad e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \cdots \otimes f^{j_1}$$

**Věta.** Souřadnice $\bar{t}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ vzhledem k bázi $\underbrace{(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n)}_{\bar{\alpha}}$ splňují

$$\bar{t}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \sum_{\substack{k_1, \cdots, k_p \\ l_1, \cdots, l_q}} a^{i_1}_{k_1} \cdots a^{i_p}_{k_p} \; t^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \; b^{l_q}_{j_q} \cdots b^{l_1}_{j_1}$$

**Příklady.**

- $U = T^1_0 U$:

  $\bar{u}^i = \sum a^i_k u^k \qquad (u)_{\bar{\alpha}} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\bar{\alpha}\alpha}}} \; (u)_\alpha$

- $U^* = T^0_1 U$

  $\bar{\eta}_j = \sum \eta_l b^l_j \qquad (\eta)_{\bar{\alpha}} = (\eta)_\alpha \; \overset{B}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\alpha\bar{\alpha}}}}$

- $Lin_2(U, U; \mathbb{K}) = T^0_2 U$

  $\bar{g}_{jk} = \sum g_{lm} b^m_k b^l_j \qquad (g)_{\bar{\alpha}} = (id)^T_{\alpha\bar{\alpha}} \; (g)_\alpha \; (id)_{\alpha\bar{\alpha}}$

- $Hom(U, U) = T^1_1 U$

  $\bar{\varphi}^i_j = \sum a^i_k \varphi^k_l b^l_j \qquad (\varphi)_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\bar{\alpha}\alpha}}} (\varphi)_{\alpha\alpha} \overset{B}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\alpha\bar{\alpha}}}}$

# Symetrické a antisymetrické tenzory

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) & \supseteq & \mathrm{Hom}(S^p U, V) & \Rightarrow & S^p U \text{ je} \dots \\ \cong & & \cong & & \\ \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V) & \supseteq & \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{sym} & & \end{array}$$

Definice. Řekneme, že $p$-lineární zobrazení $\Phi : U \times \dots \times U \to V$ je symetrické, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1, \dots, u_p) \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme symetrickou mocninu $S^p U$ jakožto kvocient

$$S^p U = \otimes^p U / \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \mid \sigma \in \Sigma_p, u_1, \dots, u_p \in U\}$$
$$= \mathrm{span}\{\rho_\sigma(t) - t \mid \sigma \in \Sigma_p, t \in \otimes^p U\}$$

Označme $\mathrm{pr} : \otimes^p U \to S^p U$ kanonickou projekci

$$\mathrm{pr}(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = \text{třída } u_1 \otimes \dots \otimes u_p =: u_1 \vee \dots \vee u_p = u_1 \cdots u_p$$

Protože

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr}(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\text{rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} & \mathrm{pr}(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)} \vee \dots \vee u_{\sigma(p)} & & u_1 \vee \dots \vee u_p \end{array}$$

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$\begin{tikzcd} \Pi^p U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{sym}"', "\substack{sym \\ p\text{-lin}}"'] & V \\ \otimes^p U \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \\ S^p U \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] & \end{tikzcd}$$

$$(u_1, \dots, u_p) \longmapsto u_1 \vee \dots \vee u_p$$

$\Phi$ sym. $p$-lin.
$\Rightarrow$ ex. jediné $G$ lineární a $G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = 0$
$\Rightarrow$ ex. jediné $F$ lineární
$F(u_1 \vee \dots \vee u_p) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$

Reformulace. Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(S^p U, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)$$
$$F \longmapsto F \circ t^{sym}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že $(S^p U)$ je kvocientem $(T^p U) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{array}{ccc} T^p U \times T^q U & \longrightarrow & T^{p+q} U \\ \downarrow \mathrm{pr} \times \mathrm{pr} & & \downarrow \mathrm{pr} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^pU \times T^qU & \longrightarrow & T^{p+q}U \\ \downarrow {\scriptstyle pr\times pr} & & \downarrow {\scriptstyle pr} \\ S^pU \times S^qU & \overset{\vee}{\dashrightarrow} & S^{p+q}U \end{array}$$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1 \vee}_{a_1 \times} \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

**Věta.** $\{e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} \mid a_1 + \dots + a_n = p\}$ tvoří bázi $S^pU$.

**Důkaz.** Je potřeba ukázat, že $F: S^pU \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ symetrické $p$-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_1, \dots, e_1, \dots, e_n, \dots, e_n)$ ... tedy $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ kde $i_1 \leq \dots \leq i_p$. $\square$

**Příklad.** $U = (\mathbb{k}^n)^*$ s bází $(f^1, \dots, f^n) = (x^1, \dots, x^n)$

$\Rightarrow$ $S^p(\mathbb{k}^n)^*$ má bázi $(x^1)^{a_1} \dots (x^n)^{a_n}$ = homogenní polynomy stupně $p$

$S^p(\mathbb{k}^n)^* \cong \mathbb{k}^{(p)}[x^1, \dots, x^n]$

$\Rightarrow$ $S(\mathbb{k}^n)^* \cong \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

**Pozn.** symetrie tenzoru $\neq$ symetrie polynomu