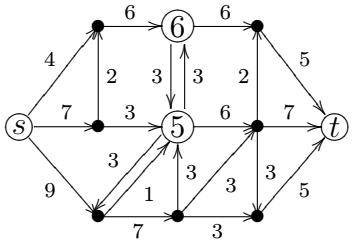
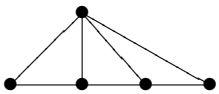
Teorie grafů – podzim 2015 – 2. termín

1. **(10 bodů)** Určete největší velikost toku v následující síti s danými kapacitami hran a dvou vrcholů a svoje rozhodnutí zdůvodněte.



2. **(10 bodů)** Určete chromatický polynom grafu



3. **(5 bodů)** Dejte příklad souvislého grafu G se šesti vrcholy, který splňuje rovnosti $\chi(G) = \chi'(G) = 4$ a není hamiltonovský. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. **(5 bodů)** Dejte příklad souvislého grafu G s 12 vrcholy, který splňuje $\chi(G) = 3$ a všechny jeho kostry jsou izomorfní. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. **(5 bodů)** Dejte příklad grafu G se šesti vrcholy, který je eulerovský a splňuje $\kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

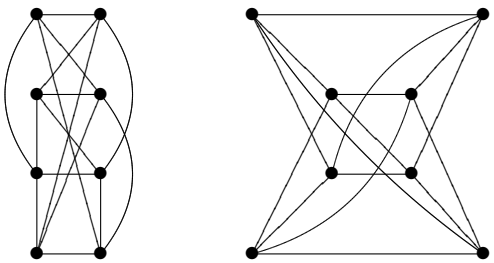
6. **(10 bodů)** Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, 1, 2, x, 4, y, 2x)$$

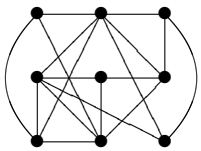
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. **(10 bodů)** Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy G s pěti vrcholy takové, že $\kappa(G) = 1$ a každý jejich bod artikulace má jiný stupeň.

8. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť $n \geq 2$ a nechť $G = (V, E)$ je obyčejný graf s množinou vrcholů $V = \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$ a množinou hran

$$E = \{\, \{(i,j), (i, (j+1) \bmod n)\},\ \{(i,j), ((i+1) \bmod n, j)\} \mid (i,j) \in V \,\}.$$

Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte blokový strom včetně v definici použitých pojmů.

12. **(5 bodů)** Formulujte Tutteho větu o perfektním párování a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. **(10 bodů)** Dokažte, že v libovolném stromě každá nejdelší cesta obsahuje všechny vrcholy středu.