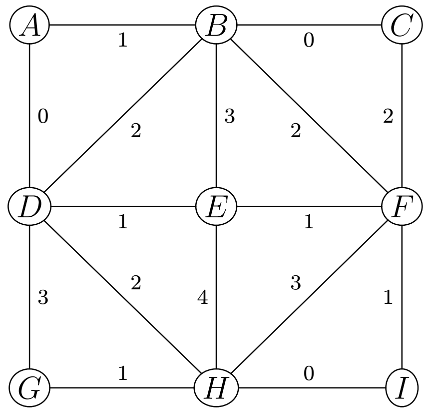
Teorie grafů – podzim 2018 – 3. termín

1. (10 bodů) Na následujícím grafu předveďte běh Dijkstrova algoritmu s počátečním vrcholem E. Vyznačte algoritmem získaný strom nejkratších cest.

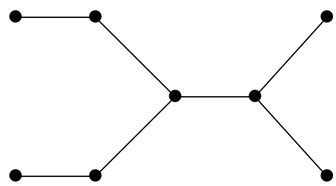


2. (10 bodů) Určete chromatický polynom grafu $K_{2,3}$.

3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu G se sedmi vrcholy, který není eulerovský a splňuje nerovnost $\kappa'(G) \geq \chi'(G)$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad grafu se šesti vrcholy, který splňuje $\chi(G) = 4$ a přitom neobsahuje podgraf izomorfní grafu K_4. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad grafu, který má následující blokový strom a jehož střed obsahuje právě čtyři vrcholy. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.



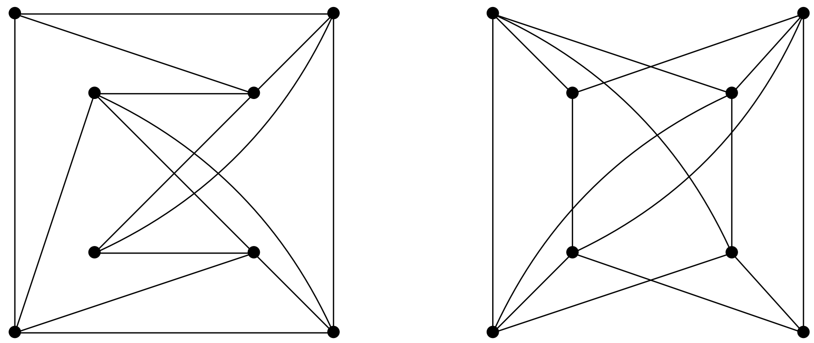
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, 1, 2, x, 4, y, x + 4)$$

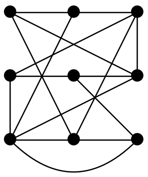
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní 2-souvislé grafy se sedmi vrcholy, které přestanou být 2-souvislé po odebrání libovolné hrany.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 5$ je celé číslo a nechť G je obyčejný graf s n vrcholy u_i a hranami $u_i u_{i+1}$ a $u_i u_{i+3}$, pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, kde u_{n+k} značí vrchol u_k, pro $k \in \{1, 2, 3\}$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte vrcholovou a hranovou souvislost grafu κ a κ'.

12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro k barev.

13. (10 bodů) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla k a n splňující $k \leq n - 2$ je největší vzdálenost vrcholů v nějakém k-souvislém grafu o n vrcholech rovna $\left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor + 1$.