Teorie grafů – podzim 2021 – 2. termín

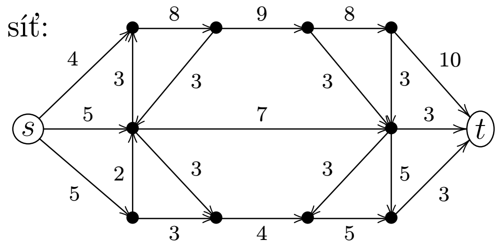
1. **(10 bodů)** Dva lékařské týmy, jejichž členové jsou označeni písmeny α až ι, respektive a až i, spolu soutěží, kdo naočkuje současně více nedůvěřivých důchodců. Následující tabulky udávají pro každého důchodce (označeni písmeny A až I a čísly 1 až 9), kterými lékaři je ochoten se nechat naočkovat.

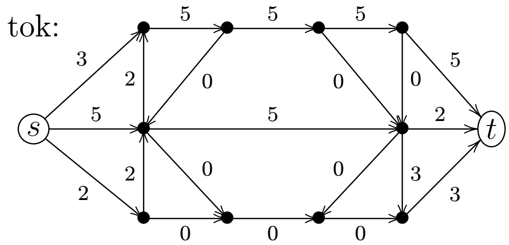
A	δ, ε	B	δ, ε, ι	C	α, β, ζ, η, ϑ	D	β, ι	E	δ, ι	F	γ, ζ, ϑ, ι
G	β, δ, ι	H	δ, ε	I	α, γ, η, ϑ, ι						

1	a, b, c	2	a, d, f	3	a, b, c, h, i	4	b, c, d, e, h, i	5	a, d, f
6	d, f, g	7	a, d, g	8	d, f, g	9	e, g, h, i		

Oba týmy přidělí důchodce lékařům optimálním způsobem. Rozhodněte, který z týmů zvítězí. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

2. **(10 bodů)** Pomocí algoritmu Edmondse a Karpa upravte následující tok na tok největší velikosti.





3. **(5 bodů)** Dejte příklad souvislého grafu se sedmi vrcholy, který má právě 11 koster. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. **(5 bodů)** Dejte příklad 2-souvislého grafu se sedmi vrcholy, který má jediný izomorfismus na sebe. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. **(5 bodů)** Dejte příklad souvislého grafu G se sedmi vrcholy, který není eulerovský, splňuje nerovnost $\chi(G) \geq \chi'(G)$ a neobsahuje vrchol stupně $\chi(G)$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

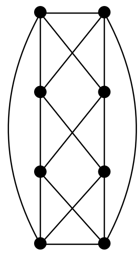
6. **(10 bodů)** Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

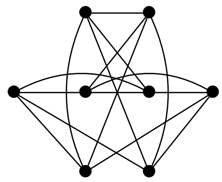
$$(1, 1, 1, 1, 2, x, 4, y, x + 3)$$

skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

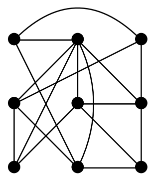
7. **(10 bodů)** Najděte všechny vzájemně neizomorfní 2-souvislé grafy se šesti vrcholy, které nejsou hamiltonovské.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.





9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 5$ je celé číslo a nechť G je obyčejný graf s n vrcholy u_i a hranami $u_i u_{i+1}$ a $u_i u_{i+3}$, pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, kde u_{n+k} značí vrchol u_k, pro $k \in \{1, 2, 3\}$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte blokový strom souvislého grafu.

12. (5 bodů) Formulujte větu o největších párováních a vrcholových pokrytích v bipartitních grafech a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. (10 bodů) Pomocí Tutteho věty dokažte, že každý 3-regulární 2-souvislý graf má perfektní párování.