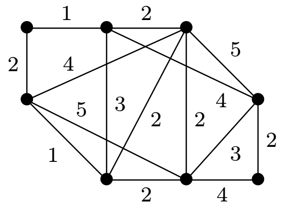
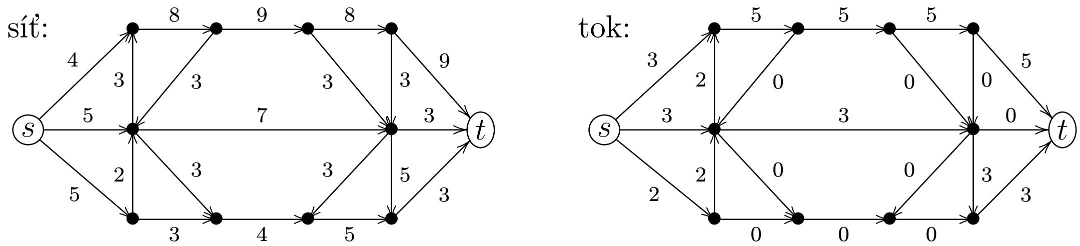
Teorie grafů – podzim 2023 – 1. termín

1. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



2. (10 bodů) Pomocí algoritmu Edmondse a Karpa upravte následující tok na tok největší velikosti.



3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu G s deseti vrcholy takového, že střed jeho blokového stromu obsahuje více než jeden vrchol. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad 3-regulárního grafu se šestnácti vrcholy, který nemá žádné perfektní párování. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad grafu G s osmi vrcholy, který má právě dva izomorfismy na sebe a splňuje rovnosti $\kappa(G) = 2$ a $\kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

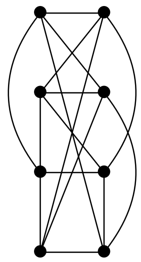
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

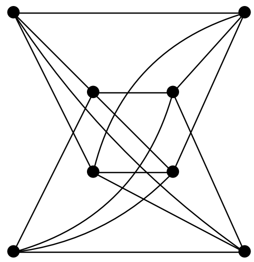
$$(1, 1, 1, x, 4, y, y, y + 1)$$

skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

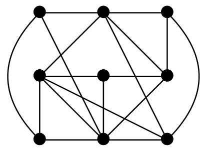
7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní souvislé grafy G se sedmi hranami a nejvýše šesti vrcholy splňující $\chi'(G) = 4$.

8. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.





9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť $n \geq 0$ je celé číslo a G je obyčejný graf s $(n+3)\cdot(2n+2)$ vrcholy $v_{i,j}$ (pro $i = 0, \ldots, n+2$ a $j = 0, \ldots, 2n+1$) a hranami $v_{i,j}v_{i+1,j}$ (pro $i = 0, \ldots, n+1$ a $j = 0, \ldots, 2n+1$), $v_{i,j}v_{i,j+1}$ (pro $i = 0, \ldots, n+2$ a $j = 0, \ldots, 2n$) a $v_{n+2,j}v_{0,2n+1-j}$ (pro $j = 0, \ldots, 2n+1$). Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte následující pojmy: obyčejný graf, podgraf, izomorfismus grafů.

12. **(5 bodů)** Formulujte větu o největších párováních a o vrcholových pokrytích v bipartitních grafech a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. **(10 bodů)** Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ dokažte, že neklesající posloupnost $(d_1, \ldots, d_n)$ je skórem nějakého stromu právě tehdy, když platí

$$d_1 \geq 1 \quad \text{a} \quad d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2.$$