5 Hypergeometrické rozdělení HyperGeom(N, p)

- Nechť N_{pop} je rozsah populace, M je počet statistických jednotek se sledovanou charakteristikou CH vyskytujících se v populaci N_{pop} a N je rozsah náhodného výběru vybraného z populace N_{pop} bez vrácení.
- X ... počet statistických jednotek se sledovanou charakteristikou CH, vyskytujících se v náhodném výběru o rozsahu N.
- $X \sim \text{HyperGeom}(N, p)$, kde $p = \frac{M}{N_{pop}}$
- $\theta = p$
- pravděpodobnostní funkce

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N_{\text{pop}}-M}{N-x}}{\binom{N_{\text{pop}}}{N}}, \qquad x = 0, 1, \ldots \tag{5.1}$$

- vlastnosti: $\text{E}[X] = Np$, $\text{Var}[X] = Np(1-p)\dfrac{N_{\text{pop}} - N}{N_{\text{pop}} - 1} = Np(1-p)r$
- Aproximace hypergeometrického modelu binomickým modelem

$$r = \frac{N_{\text{pop}} - N}{N_{\text{pop}} - 1} = 1 - \frac{N-1}{N_{\text{pop}} - 1} > 1 - f_S, \qquad f_S = \frac{N}{N_{\text{pop}}}$$

  - f_S ... *výběrový poměr* (*sampling fraction*)
  - je-li $f_S < 0.1$ (resp. $f_S < 0.05$), potom r zanedbáváme ($r \to 1$) a dochází k aproximaci náhodného výběru bez vrácení náhodným výběrem s vrácením, tedy k aproximaci hypergeometrického rozdělení binomickým rozdělením.
- dhyper(x, M, N_{pop} - M, N), phyper(x, M, N_{pop} - M, N), rhyper(N, M, N_{pop} - M, N)
- Data:
  - **Dataset 5: Počet obyvatel Jihomoravského kraje**
  - Podle údajů o počtu obyvatelstva v ČR získaných z webových stránek statistického úřadu www.czso.cz má Jihomoravský kraj ke dni 30.6.2018 celkem 1 184 381 obyvatel. Rozmístění obyvatel v jednotlivých okresích Jihomoravského kraje je k dispozici v tabulce 1.

Tabulka 1: Počet obyvatel v okresích Jihomoravského kraje k datu 30.6.2018

Okres	Blansko	Brno-město	Brno-venkov	Břeclav	Hodonín	Vyškov	Znojmo	$\sum$
Počet obyvatel	108 641	379 275	221 200	115 728	154 183	91 483	113 871	1 184 381

Příklad 5.1. Pravděpodobnostní funkce hypergeometrického modelu
Naprogramujte v R funkci dhypergeom(x, Npop, M, N) počítající hodnoty pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení HyperGeom(N, p) v hodnotě x. Správnost funkce otestujte na výpočtu $p(x)$, $x = 45, 50, 53$, pro $X \sim \text{HyperGeom}(N, p)$, kde $N = 70$ a $p = \frac{M}{N_{pop}} = \frac{240}{350}$. Výsledky ověřte s výsledky funkce dhyper().

Řešení příkladu 5.1
$p(45) = 0.0775$; $p(50) = 0.0987$; $p(53) = 0.0416$.

★

Příklad 5.2. Výpočet pravděpodobností na základě hypergeometrického modelu
Jana s Bárou a Kájou dostali hořko-mléčný adventní kalendář, ve kterém je polovina čokolád hořkých a polovina čokolád mléčných, přičemž příchutě čokolád jsou v kalendáři rozmístěny náhodně. O čokolády se děti rozhodly podělit rovným dílem, ale protože je Kája nejmenší, dovolily mu sestry, aby svůj díl čokolád snědl jako první. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že Kája, který vůbec nemá rád hořkou čokoládu, bude mít ve svém dílu (a) všechny čokolády mléčné; (b) maximálně dvě čokolády hořké; (c) více než polovinu čokolád mléčných.

Řešení příkladu 5.2

	všechny mléčné	maximálně 1 hořká	více než polovina mléčných
Kája	0.0007	0.0965	0.3334

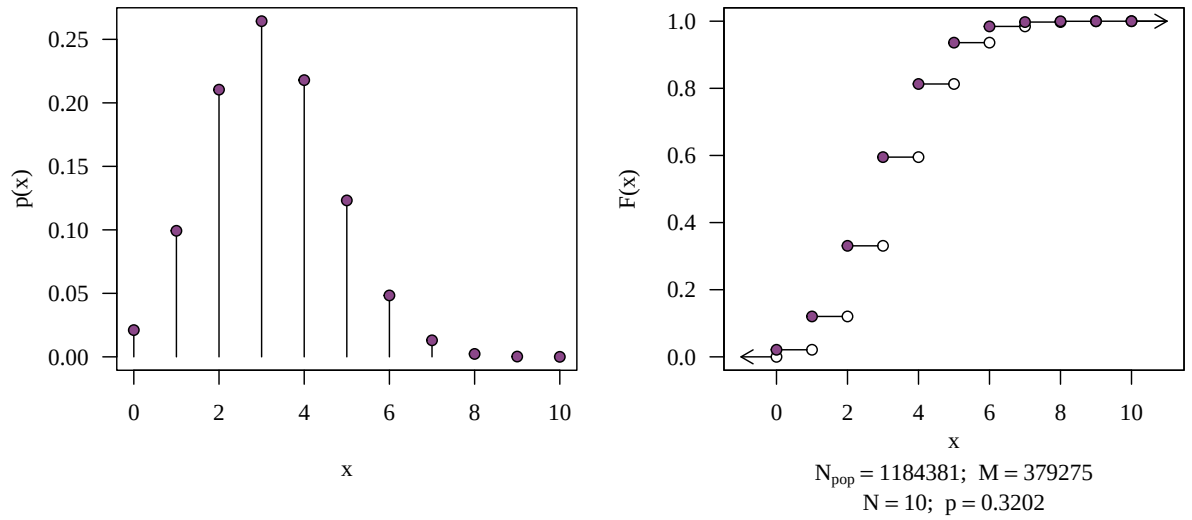
Pravděpodobnost, že všechny Kájovy čokolády budou mít mléčnou příchuť, je 0.07 %. Pravděpodobnost, že Kája bude mít mezi svými čokoládami maximálně dvě hořké, je 9.65 %. Pravděpodobnost, že více než polovina Kájových čokolád bude mléčných, je 33.34%. ★

Příklad 5.3. Odhad parametru p hypergeometrického modelu
Podle údajů uvedených v datasetu 5 má Jihomoravský kraj ke dni 30.6.2018 celkem 1 184 381 obyvatel, přičemž 379 275 obyvatel náleží do okresu Brno-město. Předpokládejme, že chceme sestavit reprezentativní vzorek 10-ti obyvatel pocházejících z Jihomoravského kraje. Pomocí hypergeometrického modelu charakterizujte chování náhodné veličiny X popisující počet obyvatel z okresu Brno-město v reprezentativním vzorku. Stanovte hodnoty parametrů N_{pop}, M a N, dopočítejte hodnotu parametru p rozdělení HyperGeom(N, p).

Řešení příkladu 5.3
Odhad parametru p je 0.3202, tj. náhodná veličina X pochází z rozdělení HyperGeom$(10, 0.3202)$. ★

Příklad 5.4. Graf pravděpodobnostní a distribuční funkce hypergeometrického rozdělení
V příkladu 5.3 jsme stanovili, že počet obyvatel z okresu Brno-město v reprezentativním vzorku 10-ti obyvatel Jihomoravského kraje se bude řídit hypergeometrickým modelem HyperGeom(N, p), kde $N = 10$ a $p = 0.3202$. Vykreslete (a) graf pravděpodobnostní funkce; (b) graf distribuční funkce rozdělení HyperGeom$(10, 0.3202)$. Na základě grafů určete, kolik obyvatel z reprezentativního vzorku bude s největší pravděpodobností pocházet z okresu Brno-město a stanovte přesnou hodnotu této pravděpodobnosti.

Řešení příkladu 5.4
S největší pravděpodobností (26.43%) budou v reprezentativním vzorku právě tři obyvatelé okresu Brno-město. ★



Obrázek 1: Pravděpodobnostní a distribuční funkce hypergeometrického modelu

Příklad 5.5. Výpočet pravděpodobností na základě hypergeometrického modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X, udávající počet obyvatel z okresu Brno-město v reprezentativním vzorku 10-ti obyvatel Jihomoravského kraje, pochází z hypergeometrického rozdělení s parametry $N = 10$ a $p = 0.3202$, tj. $X \sim \text{HyperGeom}(10, 0.3202)$ vypočítejte pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku budou (a) nejvýše tři obyvatelé z okresu Brno-město; (b) alespoň šest obyvatel z okresu Brno-město; (c) žádný obyvatel z okresu Brno město; (d) alespoň sedm obyvatel z jiného okresu; (e) nejvýše čtyři obyvatelé z jiného okresu; (f) všichni obyvatelé z jiného okresu.

Řešení příkladu 5.5

	nejvýše tři	alespoň šest	žádný
Brno-město	0.5950	0.0639	0.0211

	alespoň sedm	nejvýše čtyři	všichni
Ostatní okresy	0.5950	0.0639	0.0211

Nejvýše tři obyvatelé z okresu Brno-město budou v náhodném vzorku s pravděpodobností 59.50%. Alespoň šest obyvatel z okresu Brno-město budou v náhodném vzorku s pravděpodobností 6.39%. Pravděpodobnost, že v náhodném vzorku nebude žádný obyvatel okresu Brno město je 2.11%.

Naopak: Alespoň sedm obyvatel z jiného okresu než Brno-město budou v náhodném vzorku s pravděpodobností 59.50%. Nejvýše čtyři obyvatelé z jiného okresu než Brno-město budou v náhodném vzorku s pravděpodobností 6.39%. Pravděpodobnost, že v náhodném vzorku budou všichni obyvatelé z jiného okresu než Brno město je 2.11%. ★

Příklad 5.6. Aproximace hypergeometrického modelu binomickým – stanovení maximálního rozsahu
Prolog: Mějme populaci statistických jednotek o rozsahu N_{pop}, přičemž pravděpodobnost výskytu statistické jednotky se sledovanou charakteristikou je p. Z populace N_{pop} vybereme náhodný výběr (bez vrácení) o rozsahu N. Náhodná veličina X popisuje počet statistických jednotek se sledovanou charakteristikou vyskytujících se v náhodném výběru. Potom $X \sim \text{HyperGeom}(N, p)$ se střední hodnotou $\text{E}[X] = Np$ a rozptylem $\text{Var}[X] = Np(1-p)r$, kde $r = \frac{N_{\text{pop}}-N}{N_{\text{pop}}-1} > 1 - f_S$, přičemž $f_S = \frac{N}{N_{\text{pop}}}$ je tzv. výběrový poměr. Je-li $f_S < 0.1$ (resp. $f_S < 0.05$), r zanedbáváme a hypergeometrické rozdělení $\text{HyperGeom}(N, p)$ aproximujeme binomickým rozdělením $\text{Bin}(N, p)$.

Podle údajů uvedených v datasetu 5 má Jihomoravský kraj ke dni 30.6.2018 celkem 1 184 381 obyvatel, přičemž 379 275 obyvatel náleží do okresu Brno-město. Za předpokladu, že vybereme z populace Jihomoravského kraje náhodný výběr o rozsahu N, má náhodná veličina X popisující počet obyvatel z okresu Brno-město v náhodném výběru hypergeometrické rozdělení $\text{HyperGeom}(N, p)$, $p = \frac{379\,275}{1\,184\,381} = 0.3202$. Zaměřme se nyní na aproximaci hypergeometrického modelu binomickým modelem. Stanovte nejprve maximální rozsah náhodného výběru $N_{\max}$, při kterém je ještě možné aproximovat data hypergeometrického modelu binomickým modelem ($f_S = 0.05$).

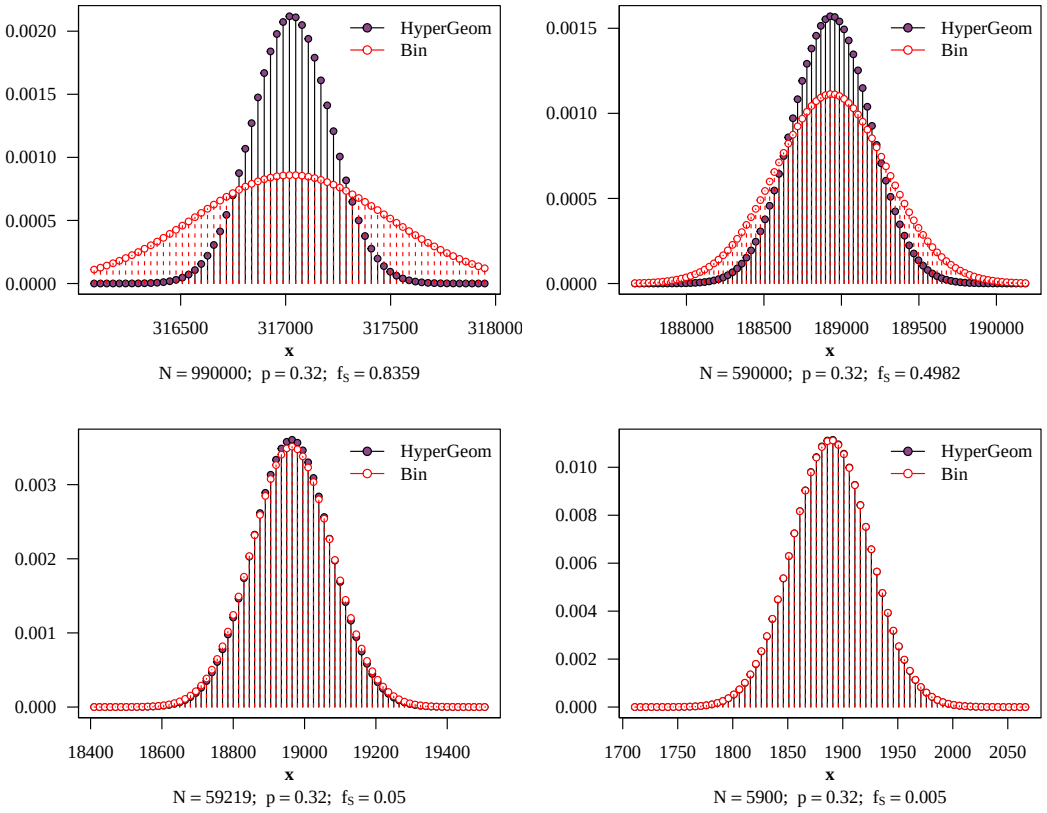
Řešení příkladu 5.6

```
[1] 59219.05
```

Maximální rozsah reprezentativního vzorku, při kterém je ještě možné aproximovat hypergeometrický model binomickým modelem je 59 219. ★

Příklad 5.7. Aproximace hypergeometrického modelu binomickým – graf pravěpodobnostní funkce
V návaznosti na příklad 5.6 vykreslete nyní graf zachycující kvalitu aproximace pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení pravděpodobnostní funkcí binomického rozdělení s parametry N a p, kde $p = 0.3202$. Hodnotu N zvolte (a) 990 000; (b) 590 000; (c) 59 219; (d) 5 900. Do grafu doplňte popisek zachycující hodnotu parametru N (rozsah reprezentativního vzorku), hodnotu parametru p a hodnotu výběrového poměru f_S.

Řešení příkladu 5.7 ★



Obrázek 2: Kvalita aproximace hypergeometrického modelu binomickým modelem v závislosti na snižujícím se rozsahu reprezentativního vzorku N

Příklad 5.8. Aproximace hypergeometrického modelu binomickým – výpočet charakteristik
V návaznosti na příklady 5.6 a 5.7 vytvořte přehlednou tabulku obsahující hodnoty N, N_{pop}, M, p, f_S, r, $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$ a $\mathrm{Var}[Y]$ pro každou variantu (a)–(d). $\mathrm{E}[X]$ a $\mathrm{Var}[X]$ značí střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X z hypergeometrického rozdělení, $\mathrm{E}[Y]$ a $\mathrm{Var}[Y]$ značí střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y z binomického rozdělení.

Řešení příkladu 5.8

N	N_{pop}	M	p	f_S	r	$\mathrm{E}[X]$	$\mathrm{E}[Y]$	$\mathrm{Var}[X]$	$\mathrm{Var}[Y]$
990000	1184381	379275	0.3202	0.8359	0.1641	317028	317028	35369	215506
590000	1184381	379275	0.3202	0.4982	0.5018	188936	188936	64454	128433
59219	1184381	379275	0.3202	0.0500	0.9500	18964	18964	12246	12891
5900	1184381	379275	0.3202	0.0050	0.9950	1889	1889	1278	1284

Tabulka 2: Aproximace hypergeometrického modelu binomickým modelem

★