7 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

- $X_1, \ldots, X_n$ ... nezávislé náhodné veličiny
- Normální rozdělení
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T$
  - hustota
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$
  - vlastnosti $\mathrm{E}[X] = \mu$; $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$
  - dnorm(x, mu, sigma), pnorm(x, mu, sigma), rnorm(M, mu, sigma), qnorm(alpha, mu, sigma)
- Standardizované normální rozdělení
  - $X \sim N(0, 1)$
  - $\boldsymbol{\theta} = (0, 1)^T$
  - hustota
$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$
  - vlastnosti $\mathrm{E}[X] = 0$; $\mathrm{Var}[X] = 1$
  - dnorm(x), pnorm(x), rnorm(M), qnorm(alpha)
- Vlastnosti normálního rozdělení
  - Věta 1: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Potom náhodná veličina $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
  - Věta 2: Nechť $X_1, \ldots, X_{n_1}$ jsou nezávislé náhodné veličiny pocházející z normálního rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ jsou nezávislé náhodné veličiny pocházející z normálního rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Potom rozdíl náhodných veličin $\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$.
- Data:
  - **Dataset 6:** 03-paired-means-clavicle2.txt
  - Datový soubor obsahuje osteometrické údaje o délkách klíčních kostí (*clavicula*). Data pochází z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916). V souboru se nachází délky klíčních kostí na pravé a levé straně těla v párovém uspořádání. Jednotlivé kosti bez druhostranné kosti nebyly do souboru zařazeny.
  - Přehled proměnných v datasetu:
    - id ... ID jedince;
    - sex ... pohlaví jedince (m - muž, f - žena);
    - length.L ... délka klíční kosti z levé strany (v mm);
    - length.R ... délka klíční kosti z pravé strany (v mm).

Příklad 7.1. Hustota normálního modelu
Naprogramujte v R funkci dnormal(x, mu, sigma2) počítající hodnoty hustoty normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ v hodnotě x. Správnost funkce otestujte na výpočtu $f(x)$, $x = -1, 0, 2$, pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 2$. Výsledky ověřte s výsledky funkce dnorm().

Řešení příkladu 7.1

```
      f(-1)      f(0)      f(2)
1 0.2196956 0.2820948 0.1037769
```

f(-1) = 0.2197; f(0) = 0.2821; f(2) = 0.1038. ★

Příklad 7.2. Základní číselné charakteristiky spojitého znaku
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Nechť náhodná proměnná X popisuje délku klíční kosti z levé strany u mužů. Proměnná X je potom spojitého typu. Pro délku klíční kosti z levé strany u mužů vytvořte tabulku základních číselných charakteristik.

Řešení příkladu 7.2
V tabulce základních číselných charakteristik budou obsaženy následující charakteristiky: aritmetický průměr, směrodatná odchylka, koeficient variace, minimální hodnota, dolní kvartil, medián, horní kvartil, maximální hodnota, interkvartilové rozpětí, koeficient šikmosti a koeficient špičatosti.

```
      n     m    s    v min dolni.kv median horni.kv max IQR sikmost spicatost
leva 50 153.6 9.95 0.06 130      147  154.5      158 176  11    0.21     -0.29
```

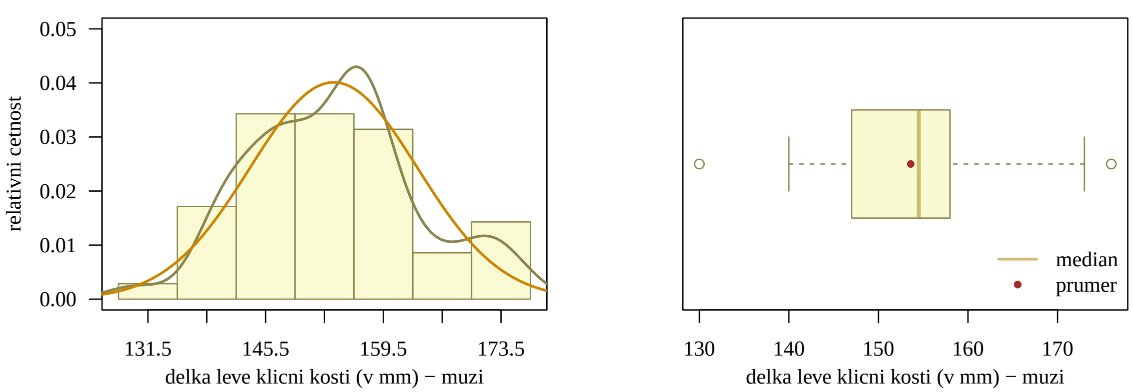
Datový soubor obsahuje údaje o délkách klíční kosti z levé strany 50 mužů. Naměřené hodnoty délky klíční kosti z levé strany u mužů se pohybují v rozmezí 130–176 mm. Průměrná délka klíční kosti z levé strany u mužů je 153.60 mm se směrodatnou odchylkou 9.95 mm. Směrodatná odchylka představuje 6 % aritmetického průměru. 25 % naměřených hodnot je menších nebo rovných 147.00 mm, 50 % hodnot je menších nebo rovných 154.50 mm, 75 % hodnot je menších nebo rovných 158.00 mm. Interkvartilové rozpětí naměřených hodnot je 11 mm. Hodnota koeficientu šikmosti ($b_1 = 0.21$) ukazuje na mírné kladné vychýlení dat (hodnoty vyšikmené doleva s prodlouženým pravým koncem), hodnota koeficientu špičatosti ($b_2 = -0.29$) ukazuje na mírně zploštělý charakter dat.

★

Příklad 7.3. Vizualizace dat z normálního modelu
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Nechť náhodná proměnná X popisuje délku klíční kosti z levé strany u mužů. Pomocí histogramu a krabicového diagramu vhodně vizualizujte rozdělení délky klíční kosti z levé strany u mužů. Histogram superponujte (a) křivkou jádrového odhadu hustoty; (b) křivkou teoretické hustoty normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Hodnoty parametrů μ a σ^2 odhadněte na základě dat.

Řešení příkladu 7.3

★



Obrázek 1: Vizualizace délky levé klíční kosti u mužů pomocí histogramu (vlevo) a krabicového diagramu (vpravo)

Příklad 7.4. Výpočet pravděpodobností na základě normálního modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X udávající délku klíční kosti z levé strany u mužů pochází z normálního rozdělení $N(153.6, 9.95^2)$ vypočítejte pravděpodobnost, že délka klíční kosti z levé strany je (a) menší než 140 mm; (b) větší než 160 mm; (c) v rozmezí 150–160 mm; (d) rovná 155 mm.

Řešení příkladu 7.4

```
      p1   p2     p3 p4
1 0.0858 0.26 0.3813  0
```

Pravděpodobnost, že délka klíční kosti z levé strany u mužů je menší než 140 mm je 8.58 %. Pravděpodobnost, že délka klíční kosti z levé strany u mužů je větší než 160 mm je 26.00 %. Pravděpodobnost, že délka klíční kosti z levé strany u mužů je v rozmezí 150–160 mm je 38.13 %. Protože délka klíční kosti z levé strany u mužů pochází z normálního rozdělení, což je rozdělení spojitého typu, je tato délka rovná 155 mm s pravděpodobností 0 %. ★

Příklad 7.5. Výpočet pravděpodobností na základě normálního modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X udávající délku klíční kosti z levé strany u mužů pochází z normálního rozdělení $N(153.6, 9.95^2)$ vypočítejte pravděpodobnost, že **průměrná délka pěti** klíčních kostí z levé strany u mužů je (a) menší než 140 mm; (b) větší než 160 mm; (c) v rozmezí 150–160 mm; (d) rovná 155 mm.

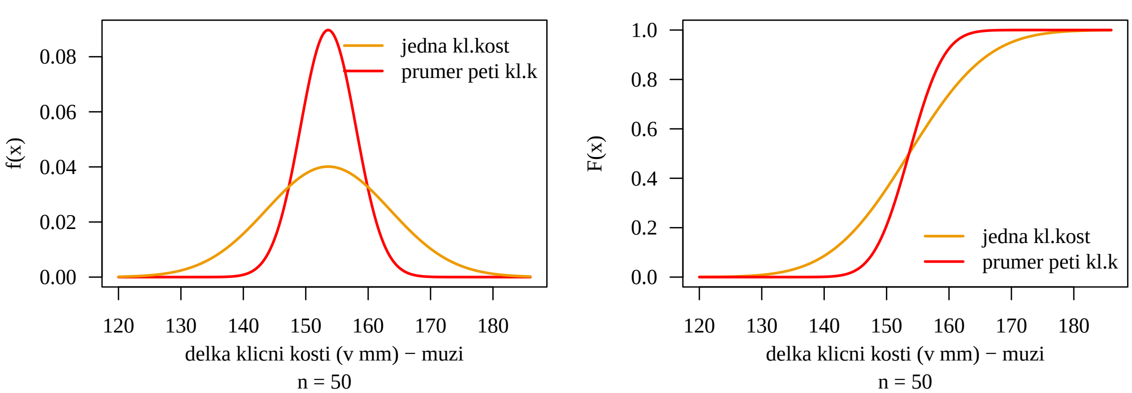
Řešení příkladu 7.5

```
      p1     p2     p3 p4
1 0.0011 0.0751 0.7157  0
```

Pravděpodobnost, že průměrná délka pěti klíčních kostí z levé strany u mužů je menší než 140 mm je 0.11 %. Pravděpodobnost, že průměrná délka pěti klíčních kostí z levé strany u mužů je větší než 160 mm je 7.51 %. Pravděpodobnost, že průměrná délka pěti klíčních kostí z levé strany u mužů je v rozmezí 150–160 mm je 71.57 %. Protože průměrná délka pěti klíčních kostí z levé strany u mužů pochází z normálního rozdělení, což je rozdělení spojitého typu, je tata délka rovná 155 mm s pravděpodobností 0.00 %. ★

Příklad 7.6. Graf funkce hustoty a distribuční funkce normálního modelu
V příkladech 7.2 a 7.3 jsme odhadli hodnoty parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení znaku $X =$ *délka klíční kosti z levé strany u mužů* jako $\widehat{\mu}_X = 153.60$ a $\widehat{\sigma}^2_X = 9.95^2$. Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce tohoto normálního rozdělení.

Řešení příkladu 7.6



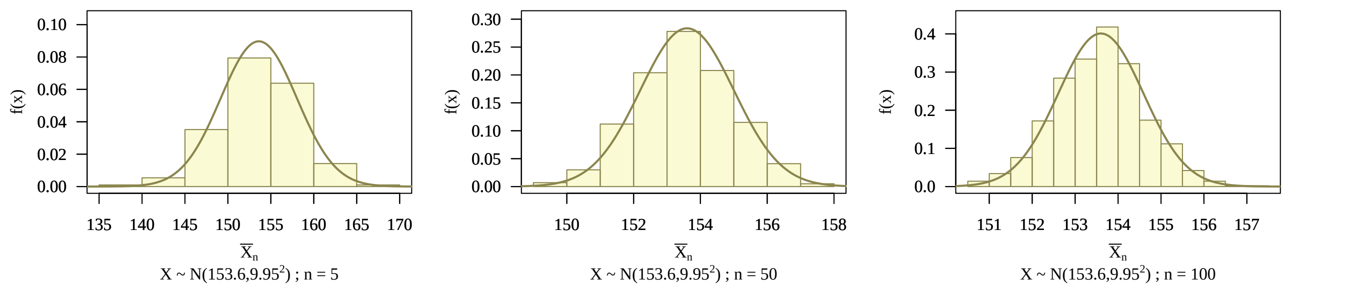
Obrázek 2: Funkce hustoty (vlevo) a distribuční funkce (vpravo) normálního modelu

★

Příklad 7.7. Simulační studie: Věta 1: Rozdělení výběrového průměru $\bar{X}_n$

Na základě simulační studie ověřte, že pokud $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Zvolte $\mu = 153.60$, $\sigma^2 = 9.95^2$, (a) $n = 5$, (b) $n = 50$, (c) $n = 100$. Vygenerujte M pseudonáhodných výběrů $X_1, \ldots, X_n$, $M = 1000$. Pro každý výběr vypočítejte realizaci aritmetického průměru $\bar{x}_{n,m}$, $m = 1, \ldots, M$. Následně vygenerujte histogram pro hodnoty $\bar{x}_{n,m}$ a superponujte jej teoretickou křivkou hustoty pro $\bar{X}_n$. Pro všechny tři případy (a), (b) i (c) vypočítejte $\Pr(\bar{X}_n > 152)$ na základě empirického a teoretického rozdělení $\bar{X}_n$. Pravděpodobnosti porovnejte.

Řešení příkladu 7.7



Obrázek 3: Histogramy průměrů 1000 náhodných výběrů o rozsahu (a) $n = 5$ (vlevo); (b) $n = 50$ (uprostřed); (c) $n = 100$ (vpravo)

```
           n = 5 n = 50 n = 100
teoreticka 0.6405 0.8723  0.9461
exaktni    0.6520 0.8510  0.9380
```

★