

## 10 Věrohodnost – Normální rozdělení

### Dataset 6: 03-paired-means-clavicle2.txt

- Datový soubor obsahuje osteometrické údaje o délkách klíčních kostí (*clavicula*). Data pochází z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916). V souboru se nachází délky klíčních kostí na pravé a levé straně těla v párovém uspořádání. Jednotlivé kosti bez druhostranné kosti nebyly do souboru zařazeny.
- Přehled proměnných v datasetu:
  - `id` ... ID jedince;
  - `sex` ... pohlaví jedince (*m* - muž, *f* - žena);
  - `length.L` ... délka klíční kosti z levé strany (v mm);
  - `length.R` ... délka klíční kosti z pravé strany (v mm).

### Příklad 10.1. Maximálně věrohodné odhady parametrů $\mu$ a $\sigma^2$ v normálním modelu

Načtěte datový soubor `03-paired-means-clavicle2.txt`. Nechť náhodná proměnná  $X$  popisuje délku klíční kosti z levé strany u mužů. Za předpokladu, že náhodná veličina  $X$  pochází z normálního rozdělení, tj.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

1. Odvoďte
  - a. tvar jádra věrohodnostní funkce  $L((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu;
  - b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu;
  - c. skóre funkci pro parametr  $\mu$ ;
  - d. skóre funkci pro parametr  $\sigma^2$ ;
  - e. tvar Fisherovy informační matice.
2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu maximálně věrohodného odhadu parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ , tj.  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}^2$ .
3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ . Maximalizaci proveďte
  - a. pomocí funkce `optim()`;
  - b. pomocí vlastnoručně naprogramované dvourozměrné Newton-Raphsonovy metody `NRnorm()`;
  - c. pomocí vlastnoručně naprogramované Broydenovy metody `BMnorm()`.
4. Vykreslete (a) vrstevnicový diagram; (b) 3D-diagram logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  odhadnutými pomocí všech tří funkcí. K vykreslení použijte (a) funkce `image()` a `contour()`, (b) funkci `persp()`.

### Řešení příkladu 10.1

```
1 data <- read.delim('03-paired-means-clavicle2.txt')
2 cla.L <- data[data$sex == 'm', 'length.L']
3 data <- na.omit(cla.L)
4 n <- length(cla.L)
5 mu <- 1 / n * sum(cla.L)
6 sigma2 <- 1 / n * sum((cla.L - mu) ^ 2)
7
8 tab <- data.frame(mu, sigma2)
9 round(tab, 4)
```

```
      mu sigma2
1 153.6  96.96
```

10  
11

```

12 #-----
13 # funkce optim()
14 lnormo <- function(theta, x){
15   n <- length(x)
16   like <- -n / 2 * log(2 * pi) - n / 2 * log(theta[2]) - 1 / (2 * theta[2]) * sum((x - theta[1]) ^ 2)
17   return(like)
18 }
19 OPTtheta <- optim(c(145, 100), lnormo, x = cla.L, control = list ( fnscale = -1))
20 max.m <- OPTtheta$par[1]
21 max.s <- OPTtheta$par[2]
22
23 #-----
24 # Newton-Raphsonova dvourozmerna metoda
25 lnorm <- function(mu, sigma, x){
26   n <- length(x)
27   like <- - n / 2 * log(2 * pi) - n / 2 * log(sigma) - 1 / (2 * sigma) * sum((x - mu) ^ 2)
28   return(like)
29 }
30
31 snorm <- function(mu, sigma, x){
32   n <- length(x)
33   skore.mu <- 1 / sigma * sum(x - mu)
34   skore.sigma <- - n / (2 * sigma) + 1 / (2 * sigma ^ 2) * sum((x - mu) ^ 2)
35   U <- c(skore.mu, skore.sigma)
36   return(U)
37 }
38
39 hnorm <- function(mu, sigma, x){
40   n <- length(x)
41   I11 <- n / sigma
42   I12 <- - 1 / sigma ^ 2 * sum(x - mu)
43   I22 <- - n / (2 * sigma2 ^ 2) + 1 / (sigma2 ^ 3) * sum((x - mu) ^ 2)
44   hessian <- matrix(c(I11, I12, I12, I22), 2, 2, byrow = T)
45   return(hessian)
46 }
47
48 NMnorm <- function(x01, x02, t){
49   x <- c(x01, x02)
50   f1 <- 0
51   f2 <- lnorm(x[1], x[2], t)
52   k <- 0
53   body <- c(0, 0)
54   while(abs(f1 - f2) > 0.00001 & k < 1000){
55     k <- k + 1
56     U <- snorm(x[1], x[2], t)
57     H <- hnorm(x[1], x[2], t)
58     x <- (x + solve(H) %*% U)
59     f1 <- f2
60     f2 <- lnorm(x[1], x[2], t)
61   }
62   return(list(mu = x[1], sigma = x[2], like = f2, k = k))
63 }
64 NMres <- NMnorm(x01 = 150, x02 = 90, cla.L)
65 max.nm <- NMres$mu
66 max.ns <- NMres$sigma
67
68 # Broydenova metoda
69 BMnorm <- function(x10, x11, x20, x21, t){
70   x1 <- c(x10, x20)
71   x2 <- c(x11, x21)
72   (f1 <- lnorm(x1[1], x1[2], t))
73   (f2 <- lnorm(x2[1], x2[2], t))
74   k <- 0
75   B <- diag(2)
76   body <- c(0, 0)
77   while(abs(f1 - f2) > 0.00001 & k < 1000){
78     k <- k + 1
79     U1 <- snorm(x1[1], x1[2], t)
80     U2 <- snorm(x2[1], x2[2], t)

```

```

80 B <- B + c(((U2 - U1) - B %*% (x2 - x1)) / sum((x2 - x1) ^ 2)) %*% t(c(x2 - x1))
81 x <- (x2 - solve(B) %*% U2)
82 f1 <- f2
83 f2 <- lnorm(x[1], x[2], t)
84 x1 <- x2
85 x2 <- x
86 body <- rbind(body, t(x))
87 }
88 return(list(mu = x[1], sigma = x[2], like = f2, k = k, body = body))
89 }
90
91 BMres <- BMnorm(x10 = 147, x11 = 157, x20 = 90, x21 = 100, cla.L)
92 max.bm <- BMres$mu
93 max.bs <- BMres$sigma
94 tab2 <- data.frame(mu = c(mu, max.m, max.nm, max.bm),
95                   sigma2 = c(sigma2, max.s, max.ns, max.bs),
96                   row.names = c("exaktn\\'i v\\'ypo\\v{c}et", "funkce {\\sf optim()}",
97                                 "Newton-Raphsonova metoda", "Broydenova metoda"))

```

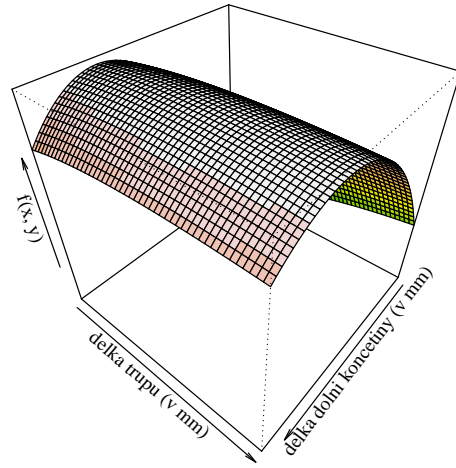
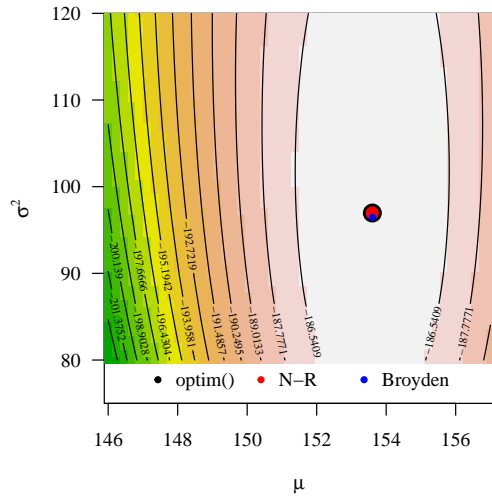
Tabulka 1: Odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  normálního rozdělení

	$\mu$	$\sigma^2$
exaktní výpočet	153.600000	96.960000
funkce <code>optim()</code>	153.601994	96.962806
Newton-Raphsonova metoda	153.600000	96.960000
Broydenova metoda	153.603912	96.461318

```

98 N <- 50
99 mu <- seq(146, 157, length = N)
100 sigma2 <- seq(80, 120, length = N)
101 M <- matrix(NA, N, N)
102 for(i in 1:length(mu)){
103   for(j in 1:length(sigma2)){
104     M[i, j] <- lnorm(mu[i], sigma2[j], cla.L)
105   }
106 }
107
108 library(colorspace)
109 k <- 15
110 par(mar = c(4, 4, 2, 2), family = 'Times')
111 image(mu, sigma2, M, col = terrain.colors(k), xlab = expression(mu), ylab = expression(sigma ^ 2),
112       breaks = seq(min(M), max(M), length = k + 1), asp = F, las = 1, ylim = c(75, 120))
113 contour(mu, sigma2, M, add = T, levels = seq(min(M), max(M), length = k + 1))
114 points(max.m, max.s, pch = 20, cex = 3)
115 points(max.nm, max.ns, pch = 20, cex = 2, col = 'red')
116 points(max.bm, max.bs, pch = 20, cex = 1, col = 'blue')
117 legend('bottom', pch = 20, col = c('black', 'red', 'blue'),
118       legend = c('optim()', 'N-R', 'Broyden'), horiz = T, bty = 'n')
119
120 nrz <- nrow(M) # pocet radku matice Z
121 ncz <- ncol(M) # pocet sloupce matice z
122 color <- terrain.colors(k)
123 stredy <- (M[-1, -1] + M[-1, -ncz] + M[-nrz, -1] + M[-nrz, -ncz]) / 4
124 stredy.col <- cut(stredy, k)
125 par(mar = c(1, 1, 1, 1), family = 'Times')
126 persp(mu, sigma2, M, ticktype = 'simple', main = '',
127       xlab = 'delka dolni koncetiny (v mm)', ylab = 'delka trupu (v mm)',
128       zlab = 'f(x, y)', col = color[stredy.col], phi = 40, theta = 130)

```



Obrázek 1: (a) Vrstevnicový diagram (vlevo); (b) 3D-diagram (vpravo) logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$

