

10 Věrohodnost – Normální rozdělení

Dataset 6: 03-paired-means-clavicle2.txt

- Datový soubor obsahuje osteometrické údaje o délkách klíčních kostí (*clavicula*). Data pochází z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916). V souboru se nachází délky klíčních kostí na pravé a levé straně těla v párovém uspořádání. Jednotlivé kosti bez druhostranné kosti nebyly do souboru zařazeny.
- Přehled proměnných v datasetu:
 - id ... ID jedince;
 - sex ... pohlaví jedince (*m* - muž, *f* - žena);
 - length.L ... délka klíční kosti z levé strany (v mm);
 - length.R ... délka klíční kosti z pravé strany (v mm).

Příklad 10.1. Maximálně věrohodné odhady parametrů μ a σ^2 v normálním modelu

Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Nechť náhodná proměnná X popisuje délku klíční kosti z levé strany u mužů. Za předpokladu, že náhodná veličina X pochází z normálního rozdělení, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

1. Odvoďte
 - a. tvar jádra věrohodnostní funkce $L((\mu, \sigma^2)^T | x)$ normálního modelu;
 - b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$ normálního modelu;
 - c. skóre funkci pro parametr μ ;
 - d. skóre funkci pro parametr σ^2 ;
 - e. tvar Fisherovy informační matice.
2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu maximálně věrohodného odhadu parametrů μ a σ^2 , tj. $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}^2$.
3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$ normálního modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametrů μ a σ^2 . Maximalizaci proveďte
 - a. pomocí funkce `optim()`;
 - b. pomocí vlastnoručně naprogramované dvourozměrné Newton-Raphsonovy metody `NRnorm()`;
 - c. pomocí vlastnoručně naprogramované Broydenovy metody `BMnorm()`.
4. Vykreslete (a) vrstevnicový diagram; (b) 3D-diagram logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů μ a σ^2 odhadnutými pomocí všech tří funkcí. K vykreslení použijte (a) funkce `image()` a `contour()`, (b) funkci `persp()`.

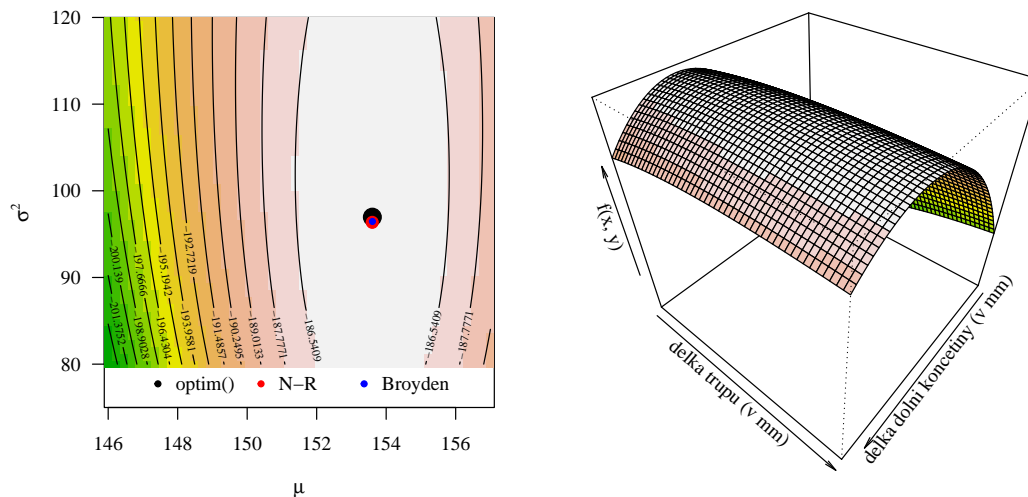
Řešení příkladu 10.1

| | <code>mu</code> | <code>sigma2</code> |
|---|-----------------|---------------------|
| 1 | 153.6 | 96.96 |

1
2

Tabulka 1: Odhady parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení

| | μ | σ^2 |
|-----------------------------|------------|------------|
| exaktní výpočet | 153.600000 | 96.960000 |
| funkce <code>optim()</code> | 153.601994 | 96.962806 |
| Newton-Raphsonova metoda | 153.600000 | 96.360928 |
| Broydenova metoda | 153.603912 | 96.461318 |



Obrázek 1: (a) Vrstevnicový diagram (vlevo); (b) 3D-diagram (vpravo) logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů μ a σ^2

★