# Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

## Asijské opce

Výplata u asijských opcí závisí na průměru ceny aktiva za období životnosti opce. Jedním z důvodů používání těchto opcí je fakt, že znemožňují velkým investorům manipulovat s cenami podkladového aktiva těsně před vypršením opčního kontraktu.

Asijská call opce typu fixed strike má výplatní funkci

$$\max(0, S_{\text{průměr}} - K)$$

Asijská put opce tohoto typu má výplatní funkci

$$\max(0, K - S_{\text{průměr}})$$

Floating strike call

$$V_T = max(0, S_T - S_{\text{průměr}})$$

dovolí koupit za průměrnou cenu.

Fixed strike dává "průměrný zisk ".

Aritmetický průměr čísel $(a_1, \dots, a_n)$ je

$$AP = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} a_j$$

Geometrický průměr

$$GP = (a_1 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$$

tedy

$$\ln GP = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \ln a_j$$

Tedy $\ln(GP) =$ AP z logaritmů.

Podobně pro funkci $f(t) : [0, T] \to \mathbb{R}$

$$AP = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\ln GP = \frac{1}{T} \int_0^T \ln f(t) dt$$

tedy

$$GP = \exp(\frac{1}{T} \int_0^T \ln f(t) dt)$$

Pro geometrický průměr existuje oceňovací formule zatímco pro aritmetický průměr neexistuje.

– AP ... součet lognormálních rozdělení není lognormální

– GP ... součet normálních rozdělení je normální

– GP ... sleduje také geom. Wienerův proces, jen s menší volatilitou. Asijské opce jsou tedy levnější.

## Basket options

– opce na portfolia

– výplatní funkce závisí na hodnotě portfolia akcií, místo jedné akcie

$$V(S_1, S_2, T) = max(S_1 + S_2 - K)$$

– polulární, např. opce na indexy

– Ocenění pomocí vícerozměrného Wienerova procesu.

„Prokletí dimenze" – v $R^n$ pro $n > 7$ nejde numericky integrovat

– SP 500, řádově vyšší dimenze

## Zobecnění Black Scholesova modelu

V předchozích kapitolách jsme předpokládali, že parametry modelu $(r, \sigma)$ jsou konstantní. Teď tento zjednodušující předpoklad opustíme a dovolíme, aby se měnily v čase.

## Tržní cena rizika

Uvažujeme derivát, jehož hodnota závisí na jediné proměnné $\theta$.

Předpokládejme, že $\theta$ se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = m \cdot \mathrm{d}t \; + \; s \cdot \mathrm{d}W,$$

kde $W$ je standardní Wienerův proces, $m$ a $s$ mohou záviset na $\theta$ a na $t$. To je velmi podstatné zobecnění.

$\theta$ může být např. cena akcie, cena ropy, ...

Nechť $f_1$ a $f_2$ jsou ceny 2 derivátů závislých jen na $\theta$ a $t$.

Jejich výplata je funkcí $\theta$ v nějakém budoucím čase.

Předpokládejme, že $f_1$ a $f_2$ splňují rovnice

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} = \mu_1 \, \mathrm{d}t + \sigma_1 \, \mathrm{d}W,$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{f_2} = \mu_2 \, \mathrm{d}t + \sigma_2 \, \mathrm{d}W,$$

kde $\mu_1, \ \mu_2, \ \sigma_1, \ \sigma_2,$ jsou funkce $\theta$ a $t$. $W$ je tentýž proces ve všech třech rovnicích.

Náhodný člen $\Delta W$ můžeme kombinací $f_1$ a $f_2$ eliminovat:

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta W \qquad / \cdot \sigma_2 f_2$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta W \qquad / \cdot (-\sigma_1 f_1)$$

Uvažujme portfolio s $\sigma_2 f_2$ 1. derivátu a množství $-\sigma_1 f_1$ 2. derivátu. Nechť $\pi$ je jeho hodnota.

$$\pi = \sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2$$

$$\Delta\pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 = \mu_1 f_2 \sigma_2 f_1 \Delta t - \sigma_1 f_1 \mu_2 f_2 \Delta t$$

Takové portfolio je tedy bezrizikové a musí platit z neexistence arbitráže

$$\Delta\pi = r \cdot \pi \cdot \Delta t,$$

kde $r$ je bezriziková úroková míra.

Dosazením dostaneme:

$$\Delta\pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 = r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2)\Delta t$$

$$(\sigma_2 \mu_1 f_1 f_2 - \sigma_1 \mu_2 f_2 f_1)\Delta t = r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2)\Delta t$$

$$\sigma_2 \mu_1 - \mu_2 \sigma_1 = r\sigma_2 - r\sigma_1$$

$$\sigma_2(\mu_1 - r) = \sigma_1(\mu_2 - r)$$

$$\underbrace{\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}_{\text{parametry} f_1} = \underbrace{\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}}_{\text{parametry} f_2} \Rightarrow \text{ závisí pouze na } \theta$$

Dokázali jsme tedy, že je-li cena derivátu závislého jen na $\theta$ a $t$ rovna $f$, splňující rovnici

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W,$$

pak

$$\boxed{\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda} \qquad .$$

platí pro všechny takové deriváty.

Definice: $\lambda$ se nazývá *tržní cena rizika* veličiny $\theta$.

– $\lambda$ určuje drift procesu

– Obecně je $\lambda$ funkcí $\theta$ a $t$. Hodnota

$$\mu - r = \lambda \cdot \sigma$$

je míra rizika související s $\theta$ obsažená v $f$. Máme tedy:

$\lambda$ ... cena rizika

pravá strana = míra rizika $\cdot$ cena rizika

levá strana = očekávaný zisk přidaný k bezrizikové míře,

který kompenzuje toto riziko

Příklad: Uvažujme derivát, jehož hodnota je závislá na ceně ropy (v kladném směru; t.j. roste-li cena ropy, roste cena derivátu) a nezávisí na jiných proměnných. Předpokládejme, že očekávaný zisk je 12% ročně, volatilita je 20% ročně a nechť $r = 8\%$. Tržní cena rizika ropy je tedy

$$\frac{0,12 - 0,08}{0,2} = 0,2.$$

Připomeňme, že výměnou pravděpodobnostní míry za ekvivalentní můžeme dosáhnout změny koeficientu driftu (Cameron-Martinova věta pro konstantní drift, Girsanova věta pro obecný stochastický drift).

Používá se také následující alternativní terminologie: výběr pravděpodobnostní míry určuje "svět," ve kterém platí určitá cena rizika ("míra" $\sim$ cena rizika).

Cena rizika $= 0$ pak odpovídá risk-neutrálnímu světu.

Nechť opět $f$ je cena derivátu závislého na proměnné $\theta$.

Předpokládejme, že se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$\mathrm{d}f = \mu f \,\mathrm{d}t + \sigma f \,\mathrm{d}W,$$

kde $W$ je standardní Wienerův proces, $\mu$ a $\sigma$ jsou funkce $t$ a $\theta$.

Hodnota $\mu$ závisí na vztahu investora vůči riziku. Ve světě, kde cena rizika je rovna 0 (risk-neutrální svět), máme

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0 \iff \mu = r,$$

tedy

$$\mathrm{d}f = rf\,\mathrm{d}t + \sigma f\,\mathrm{d}W.$$

To platí v standardním risk-neutrálním světě (cena rizika odpovídá výběru pravděpodobnostní míry).

Připomeňme ještě matematický popis vztahu investora k riziku.

Příklad:

– Volba I: dostaneme s jistotou 50 Kč

– Volba II: s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme 100 Kč, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme 0 Kč

Očekávání je pro obě volby stejné (50 Kč). Volba I má rozptyl 0 (nulové riziko), volba II má nenulové riziko.

Investor je

– rizikově neutrální, pokud obě volby jsou ekvivalentní

– rizikově averzní, pokud volba I je pro něj lepší (většina investorů)

– vyhledávající riziko, pokud volba II je pro něj lepší (hazardní hráči)

Jiné předpoklady o tržní ceně rizika dávají "jiné světy."

Obecně máme

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

$$\mathrm{d}f = (r + \lambda\sigma) \cdot f \,\mathrm{d}t + \sigma f \,\mathrm{d}W. \tag{1}$$

Tržní cena rizika tedy určuje míru růstu všech derivátů závislých na dané proměnné. Při přechodu od jedné ceny rizika k jiné se mění koeficient růstu, ale volatilita zůstává stejná. Pro určitou hodnotu ceny rizika dostaneme "reálný svět", to co pozorujeme v praxi.

*Připomenutí:* Itôův proces je martingal právě tehdy, když koeficient u $\mathrm{d}t$ je identicky rovný nule, tedy

$$\mathrm{d}\theta = \sigma(t, \theta) \cdot \mathrm{d}W.$$

Víme, že pro martingal platí

$$\boxed{\mathrm{E}(\theta_T) = \theta_0}$$

## Numeraire

Pojem numeraire zachycuje volbu jednotek které použijeme pro vyjádření ceny aktiva.

Nechť $f$ a $g$ jsou ceny obchodovatelných aktiv, závisející na jednom zdroji nejistoty.

Definice: Hodnota

$$\Phi = \frac{f}{g}.$$

se nazývá *relativní cena* $f$ vzhledem ke $g$.

$\Phi$ můžeme chápat jako cenu $f$ vyjádřenou v jednotkách $g$, namísto korun.

Aktivum $g$ se nazývá *numeraire*.

Věta: Za předpokladu neexistence arbitráže je $\Phi$ martingal pro nějakou volbu tržní ceny rizika. Touto volbou je volatilita $g$.