Základní kombinatorické identity

MIN101 Matematika I

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

20. září 2022

Obsah

Výběry bez opakování (vracení)

Základní soubor: n různých rozlišitelných prvků

1. Variace k-té třídy z n prvků
   Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

   $$v(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Permutace n prvků
   Vybíráme všechny prvky, přihlížíme k pořadí, tj. prvky uspořádáme

   $$p(n) = v(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \text{ (faktoriál)}$$

3. Kombinace k-té třídy z n prvků
   Vybíráme k prvků, k pořadí nepřihlížíme

   $$c(n,k) = \frac{v(n,k)}{p(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} \text{ (kombinační číslo)}$$

Výběry s opakováním (vracením)

Základní soubor: prvky rozděleny do n druhů, v rámci druhu jsou nerozlišitelné

1. Variace k-té třídy z n prvků s opakováním
   Prvků každého druhu je alespoň k. Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

   $$V(n,k) = n \cdot n \cdots n = n^k$$

2. Permutace s opakováním v situaci $(k_1, k_2, \dots, k_n)$
   Počet prvků prvního druhu je k_1, druhého druhu k_2, atd. až n-tého druhu je k_n

   $$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{p(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)}{p(k_1)p(k_2)\cdots p(k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2!\, \cdots\, k_n!}$$

3. Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním
   Prvků každého druhu je alespoň k. Vybíráme k prvků a k pořadí nepřihlížíme

   $$C(n,k) = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Příklady

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

$$v(58,3) = 58 \cdot 57 \cdot 56 = 185\,136$$

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

- Z hlediska ubytovaných:

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$c(50,35)=\binom{50}{35}=\binom{50}{15}=$$
$$=\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=$$
$$=2{,}250\,829\,575\cdot 10^{12}$$

- Z hlediska ubytovaných:

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$c(50,35) = \binom{50}{35} = \binom{50}{15} =$$
$$= \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} =$$
$$= 2{,}250\,829\,575\cdot 10^{12}$$

- Z hlediska ubytovaných:

$$v(50,35) = \frac{50!}{15!} = 2{,}325\,815\,505\cdot 10^{52}$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen 'a', 'i', 'k', 'l', 'm', 't', 'v': $p(7)$
Tři písmena 'o' lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen 'a', 'i', 'k', 'l', 'm', 't', 'v': $p(7)$
Tři písmena 'o' lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově 'lokomotiva'?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen 'a', 'i', 'k', 'l', 'm', 't', 'v': $p(7)$
Tři písmena 'o' lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Souhlásky: 'k', 'l', 'm', 't', 'v', samohlásky: 'a', 'i', 'o', 'o', 'o'

$$2\cdot p(5)\cdot P(1,1,3) = 2\cdot 5!\cdot\frac{5!}{3!} = \frac{(5!)^2}{3} = 4\,800$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3,50) = \frac{53!}{3!\,50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4,50)$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3, 50) = \frac{53!}{3!\,50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4, 50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3,50)=\frac{53!}{3!\,50!}=\frac{53\cdot 52\cdot 51}{3\cdot 2}=23\,426=C(4,50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Každém dítěti přidělíme 5 kuliček a rozdělujeme pouze zbývající:

$$P(50-4\cdot 5,3)=P(30,3)=\frac{33!}{30!\,3!}=\frac{33\cdot 32\cdot 31}{3\cdot 2}=11\cdot 16\cdot 31=5\,456$$

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25,2) = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

způsoby.

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25,2)=\binom{25}{2}=\frac{25\cdot 24}{2}=300$$

způsoby.

Libovolnou dvojici pohlednic lze poslat libovolné osobě, tj.

$$V\big(c(25,2),3\big)=c(25,2)^3=300^3=27\,000\,000$$

způsoby.

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 4\cdot 5^5 = 4\cdot 5^5\frac{5!}{2!\,3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 5^6 = 5^6\frac{5!}{2!\,3!}$$

Celkem:

$$4\cdot 5^5\frac{5!}{2!\,3!} + 5^6\frac{5!}{2!\,3!} = (4+5)5^5\frac{5!}{2!\,3!} = 9\cdot 5^5\cdot\frac{5\cdot 4}{2} = 2\cdot 3^2\cdot 5^6 = 281\,250$$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10, i) = \binom{10}{i}$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10,i) = \binom{10}{i}$

Celkem:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} =$$
$$= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 = 638$$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Závěr:

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10}$$

MASARYKOVA
UNIVERZITA