

## 1 1. týden – komplexní čísla a zbytkové třídy

Cvičení konané 15. 9. 2021.

## 2 2. týden – diferenční rovnice, kombinatorika

Cvičení konané 22. 9. 2021.

**Příklad 2.1:** (Příklady 1.27 a 1.28 z Drsné matematiky.) Mirek si chce koupit nové auto, které stojí 300 000 č. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%.

- (i) Mirek by chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?
- (ii) Jak dlouho by Mirek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?

**Příklad 2.2:** Na schůzi má promluvit pět řečníků A,B,C,D,E (každý právě jednou).

- (i) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.
- (ii) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A.
- (iii) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A.

**Příklad 2.3:** Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer

- (i) 1, 2, 3, 4
- (ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6
- (iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Kolik z nich je sudých? Kolik z nich je dělitelných čtyřmi?

**Příklad 2.4:** Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet všech možných rozdělení. Určete počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.

**Příklad 2.5:** Pro libovolné pevné  $k, n \in \mathbb{N}$  určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

**Příklad 2.6:** Pro libovolné pevné  $k, n \in \mathbb{N}$  určete počet všech řešení nerovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

**Příklad 2.7:** (Příklady 1.36 z Drsné matematiky.) Do řady v kině o  $2n$  místech je náhodně rozmístěno  $n$  mužů a  $n$  žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

### 3 3. týden – pravděpodobnost

Cvičení konané 29. 9. 2021.

**Příklad 3.1:** Ve zprávě školy jsou uvedeny následující údaje. Dokažte, že tato zpráva je chybná.

- Do ročníku chodí 45 dětí, z toho 30 chlapců.
- 30 dětí má dobrý prospěch, z nich je 16 chlapců.
- 28 dětí sportuje, z toho 18 chlapců a 17 dětí s dobrým prospěchem.
- 15 chlapců má dobrý prospěch a zároveň sportuje.

**Příklad 3.2:** Dvě kostky mají netradičně popsané stěny - jedna má čísla 113366 a druhá 223444. Která z nich bude „častěji“ vítězit? Přesněji řečeno, určete pravděpodobnost vítězství první kostky, pravděpodobnost remízy a pravděpodobnost vítězství druhé kostky. (Pozn.: Když přidáme třetí kostku s čísly 113555, kostky se „navzájem porazí“.)

**Příklad 3.3:** Hodíme červenou a modrou (standardní) kostkou a uvažujeme následující jevy:

- Jev A: součet na kostkách je dělitelný třemi.
- Jev B: na kostkách jsou stejná čísla.
- Jev C: na červené kostce je vyšší číslo než na modré.

Rozhodněte, zda jsou tyto jevy stochasticky nezávislé.

**Příklad 3.4:** Karel má ve skříni jsou 2 zelené, 6 modrých a 6 černých ponožek.

- Ráno Karel náhodně vytáhne ze skříně 2 ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že budou mít stejnou barvu?
- Karel přijde ke skříni druhý den a opět vytáhne 2 ponožky (špinavé se do skříně nevrací). S jakou pravděpodobností vytáhne dvě stejnobarevné za předpokladu, že první den vytáhl dvě stejnobarevné?

**Příklad 3.5:** Následující příklady řešte pomocí geometrické pravděpodobnosti:

- (i) V kruhové ohradě s kulem uprostřed je zavřený kůň (jehož výskyt je náhodný). Jaká je pravděpodobnost, že je kůň blíže ke středovému kůlu než k ohradě?
- (ii) Kůň je v obdélníkové ohradě, u jejíž jedné strany stojí pozorovatel. Jaká je pravděpodobnost, že je kůň nejbliže ke straně s pozorovatelem?

**Příklad 3.6:** Když zbyde čas, budeme násobit matice.

## 4 4. týden – geometrie v rovině

Cvičení konané 6. 10. 2021.

**Příklad 4.1:** Určete matici  $A^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 4.2:** (Příklad 1.51 z Drsné matematiky.) Jsou dány přímky

$$p : [2, 0] + t(3, 2), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q : [-1, 2] + s(1, 3), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Naúzněte průsečík těchto přímek a určete obecnou rovnici přímky  $p$ .

**Příklad 4.3:** (Příklad 1.53 z Drsné matematiky.) Najděte obecnou rovnici přímky  $p$ , jež prochází bodem  $[2, 3]$  a je rovnoběžná s přímkou  $x - 3y + 2 = 0$ . Dále určete parametrickou rovnici přímky  $q$  procházející body  $[1, 3]$  a  $[-2, 1]$ .

**Příklad 4.4:** Je dán trojúhelník  $ABC$ , kde  $A = [1, 1]$ ,  $B = [3, 2]$  a  $C = [-4, 6]$ .

- (i) Určete obsah trojúhelníku  $ABC$ .
- (ii) Určete vnitřní úhly.
- (iii) Je bod  $R = [0, 4]$  uvnitř trojúhelníka?
- (iv) Které strany (resp. vrcholy) jsou viditelné z bodu  $P = [-8, 9]$ ?

**Příklad 4.5:** V čase  $t = 0$  vyslal hráč v bodě  $[0, 0]$  puk na prázdnou bránu ve (správném) směru  $(10, 30)$  rychlostí  $10$  m/s. O  $0,5$  s později protihráč v bodě  $[20, 10]$  hodil hokejku délky  $\sqrt{2}$  ve směru  $(-10, 10)$  také rychlostí  $10$  m/s. (V čase  $t_1 = 0,5$  s je v bodě  $[20, 10]$  začátek hokejky.) Zamezí hozená hokejka pohybu puku do prázdné brány?

**Příklad 4.6:** Mějme pravidelný šestiúhelník se středem v počátku  $[0, 0]$ , přičemž jeden z vrcholů je  $[20, 0]$ . Určete jeho ostatní vrcholy.

## 5 5. týden – relace

Cvičení konané 20. 10. 2021.

**Příklad 5.1:** Na množině  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  je relace  $\rho$  definována vztahem  $x\rho y \iff x \cdot y > 0$ . Dokažte, že  $\rho$  je ekvivalencí na  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  a popište rozklad  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\rho$ .

**Příklad 5.2:** Na množině  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  je definována relace  $\rho$ . Dokažte, že  $\rho$  je relace ekvivalence a načrtněte, jak vypadá rozklad  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\rho$  (zde  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  chápeme jako množinu všech bodů v rovině). Přitom pro  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  je:

- (i)  $(x, y)\rho(u, v) \iff x - u = 0$ .
- (ii)  $(x, y)\rho(u, v) \iff y - v = 2(x - u)$ .
- (iii)  $(x, y)\rho(u, v) \iff (x - u)(x + u) = (v - y)(v + y)$ .
- (iv)  $(x, y)\rho(u, v) \iff x^2 + y^2 + x + y = u^2 + v^2 + u + v$ .

**Příklad 5.3:** Rozhodněte, zda jsou následující relace uspořádání, resp. lineární uspořádání na  $\mathbb{N}$ . Je-li tomu naznačte Hasseovský diagram uspořádané množiny  $(\mathbb{N}, \preceq)$ :

(i)  $x \preceq y \iff x = y$ ,

(ii)  $x \preceq y \iff x \leq y$ ,

(iii)  $x \preceq y \iff x < y$ ,

(iv)  $x \preceq y \iff$  počet cifer čísla  $x$  je menší nebo roven počtu cifer čísla  $y$ ,

(v)  $x \preceq y \iff y = 4 \vee x = y$ ,

(vi)  $x \preceq y \iff (x = y) \vee (2 \nmid x \wedge 2 \mid y) \vee (2 \mid x + y \wedge x < y)$ .

---

Zde jsme skončili 6.10.2021

---

## 6 6. týden – soustavy lineárních rovnic, vektorové prostory

Cvičení konané 22. 10. a 27. 10. 2021.

**Příklad 6.1:** Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 3, & -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0, & x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Gaussovou eliminací (zpětné eliminace).

**Příklad 6.2:** Řešte soustavu rovnic

$$7x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \quad -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2, \quad 50x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4.$$

Pak najděte řešení příslušné zhomogenizované soustavy.

**Příklad 6.3:** Najděte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

**Příklad 6.4:** Popište množinu řešení následující soustavy rovnic v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

**Příklad 6.5:** V  $\mathbb{R}^4$  jsou dány vektory

$$v_1 = (1, 1, 1, 2), \quad v_2 = (-1, -1, 1, 2), \quad v_3 = (1, 1, 3, 6), \quad v_4 = (3, 3, 1, 2).$$

- (i) Vyberte z nich bázi  $\alpha$  podprostoru  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ . Pak tuto bázi doplňte na nějakou bázi  $\beta$  podprostoru  $\mathbb{R}^4$ .
- (ii) Určete souřadnice vektoru  $u = (5, 4, 2, 4)$  v bázi  $\beta$ .

**Příklad 6.6:** Rozhodněte, zda je následující množina vektorovým podprostorem a případně najděte bázi a určete jeho dimenzi:

- (i)  $M, M' \subseteq \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ ,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad M' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

- (ii)  $Q, S \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ ,

$$Q = \{f(x) \mid f(1) = 0 \wedge f(2) = 0\}, \quad S = \{g(x) \mid g(x) = g(-x)\}.$$

**Příklad 6.7:** Mějme podprostory  $Q, S \subseteq \mathbb{R}_4[x]$  z předchozího příkladu. Určete bázi a dimenzi podprostorů  $Q + S$  a  $Q \cap S$  v  $\mathbb{R}_4[x]$ .

## 7 7. týden – skalární součin, lineární zobrazení

Cvičení konané 18. 11. 2021.

**Příklad 7.1:** Nalezněte ortogonální a ortonormální bázi prostoru  $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ , kde

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0, 3), \quad v_3 = (1, 2, 1, 0).$$

**Příklad 7.2:** Napište matice následujícího lineárního zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ve standardní bázi  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $\varphi$  splňuje  $\varphi(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$ ,  $\varphi(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$  a  $\varphi(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ ,
- b)  $\varphi$  je kolmá projekce do roviny s nulovou třetí souřadnicí,
- c)  $\varphi$  je kolmá projekce do roviny  $x + y + z = 1$ ,
- d)  $\varphi$  je kolmá projekce do roviny  $x + y + z = 0$ ,
- e)  $\varphi$  je rotace kolem osy  $(1, 1, 1)$  o úhel  $\frac{2\pi}{3}$ .

Dále určete matici lineárního zobrazení  $\mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$  danou předpisem  $f \mapsto (f(1), f(2))$  ve standardních bazích těchto vektorových prostorů.

## 8 8. týden – determinanty, vlastní vektory

Cvičení konané 25. 11. 2021.

**Příklad 8.1:** Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 8.2:** Určete vlastní vektory a čísla matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

## 9 9. týden – vlastnosti lineárních zobrazení

Cvičení konané 2. 12. 2021.

**Příklad 9.1:** Určete, jaké lineární zobrazení zadává ortogonální matice

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 9.2:** Určete, jaké lineární zobrazení zadává ortogonální matice

$$C = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Dále mějme rovinu  $\rho$  zadanou rovnicí (tj. implicitně)  $\rho : x_1 - x_3 = 0$ . Určete obraz roviny  $\rho$  při zobrazení  $\varphi$ .

## 10 10. týden – lineární diferenční rovnice

Cvičení konané 9. 12. 2021.

Uvažme diferenční rovnici

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = P(n) \alpha^n$$

kde  $P(n)$  je nějaký polynom. Proto takovouto pravou stranu hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_n = Q(n) n^r \alpha^n$$

kde  $Q(n)$  je polynom stejného stupně jako  $P(n)$  a  $r$  je násobnost  $\alpha$  jakožto kořene charakteristického polynomu  $a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ . (Jestliže  $\alpha$  není kořenem, tak  $r = 0$ .)

**Příklad 10.1:** Řešte následující lineární diferenční rovnice:

a)  $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$  s počátečními podmínkami  $y_0 = 2$  a  $y_1 = 7$ . [Řešení:  $y_n = 3^{n+1} - 2^n$ .]

b)  $y_{n+3} = 4y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 3$  a  $y_2 = 5$ . [Řešení:  $y_n = 1 - 2n + 2^{n+1}$ .]

**Příklad 10.2:** Najděte obecné řešení lineární diferenční rovnice  $y_{n+4} = y_{n+3} + y_{n+1} - y_n = 0$ . [Řešení:  $y_n = C_1 + C_2 n + C_3 \sin(\frac{2\pi n}{3}) + C_4 \cos(\frac{2\pi n}{3})$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ .]



**Příklad 10.3:** Řešte následující lineární diferenční rovnice:

a)  $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = (n+2)2^n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = y_1 = 0$ .

b)  $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 4(-3)^n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = y_1 = 0$ . [Řešení:  $y_n = 2n(n-1)(-3)^n$ .]

**Příklad 10.4:** Určete řešení lineární diferenciální rovnice  $y_{n+4} - 2y_{n+2} + y_n = 3$  s počátečními podmínkami  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = \frac{11}{8}$ ,  $y_2 = \frac{9}{2}$ ,  $y_3 = \frac{35}{8}$ . [Řešení:  $y_n = 2 + (-1)^n + \frac{3}{8}n^2$ ]

**Příklad 10.5:** Odvoďte vzorce pro součty

a)  $s_n = \sum_{k=0}^n k^2$ .

b)  $s_n = \sum_{k=0}^n k^3$ .

[Řešení: a)  $s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , (b)  $s_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .]

## 11 11. týden – iterační procesy s nezápornými maticemi

Cvičení konané 16. 12. 2021.

**Příklad 11.1:** (Leslieho model růstu.) Mějme populaci ovcí rozdělenou do tří skupin:

- jehňata (0-2 roky) - porodnost  $1/2$ , úmrtnost  $1/2$  (na jedno jehně),
- dospělé ovce (1-2 roky) - porodnost  $3/2$ , úmrtnost  $1/2$  (na jednu dospělou ovci),
- staré ovce (2-3 roky) - porodnost  $1/2$  (na jednu starou ovci), všechny staré ovce jdou na jatka.

Popište dlouhodobý vývoj populace.

**Příklad 11.2:** (Leslieho model růstu.) Mějme populaci ovcí rozdělenou do čtyř skupin:

- jehňata (0-1 rok) - porodnost 0, úmrtnost  $1/2$  (na jedno jehně),
- mladé ovce (1-2 roky) - porodnost 2, úmrtnost  $1/2$  (na jednu mladou ovci),
- dospělé ovce (2-3 roky) - porodnost 4, úmrtnost  $1/2$  (na jednu dospělou ovci),
- staré ovce (3-4 roky) - porodnost 2 (na jednu starou ovci), všechny staré ovce jdou na jatka.

Farmář chce navíc prodávat jehňata na kožešinu. Jakou část jich má prodat, aby měl stabilní chov? A jaké pak bude rozložení populace?

**Příklad 11.3:** (Markovův proces.) Malé dítě si hraje se 4 kostkami, snaží se z nich postavit věž. Když má rozházené kostky, tak se mu s pravděpodobností  $1/2$  podaří dát dvě kostky na sebe (věž výšky 2). Když má věž výšky 2 nebo 3, tak se mu podaří s pravděpodobností  $1/2$  přidat jednu kostku (výška se zvýší o 1) a s pravděpodobností  $1/2$  stávající věž zboří. Když má věž výšky 4, tak dítě radostně zatleská a věž zboří.

Po dlouhé době se na dítě přijde podívat tatínek. S jakou pravděpodobností najde věž výšky 4 (nebo 3 nebo 2 nebo 1)?

**Příklad 11.4:** Roztržitý profesor ztrácí s pravděpodobností  $1/2$  deštník všude, kam přijde, přičemž jeho denní trasa je každý den domov-práce-restaurace-práce-domov. S jakou pravděpodobností se bude deštník na Štědrý večer 2021 nacházet v restauraci?

## 12 12. týden – Jordanovy kanonické tvary

Cvičení konané 6. 1. 2021.

**Příklad 12.1:** Určete Jordanův kanonický tvar následujících matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

spolu s příslušnými transformačními maticemi.

## 13 13. týden – Afinní a Euklidovská geometrie

Cvičení konané 13. 1. 2021.

Budeme pracovat s krychlí

$$\begin{aligned} A &= [0, 0, 0], & B &= [1, 0, 0], & C &= [1, 1, 0], & D &= [0, 1, 0], \\ E &= [0, 0, 1], & F &= [1, 0, 1], & G &= [1, 1, 1], & H &= [0, 1, 1]. \end{aligned}$$

**Příklad 13.1:**

- Určete příčku mimoběžek  $DE$  a  $GH$  procházející bodem  $B$ .
- Rozmyslete si příčku mimoběžek  $DE$  a  $GH$  procházející bodem  $C$ .
- Určete vzdálenost přímek  $AF$  a  $EG$ .

[Řešení: (a) příčka protíná přímku  $DE$  v bodě  $[-1, 1, 1]$  a přímku  $GH$  v bodě  $[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , (b) neexistuje, (c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .]

**Příklad 13.2:** Určete vzdálenost bodu  $X = [1, 3, 0, 1]$  od podprostoru

$$\rho : [1, 0, 0, 1] + r(1, 1, 0, 1) + s(1, 0, 1, -1) + t(2, 1, 2, 0).$$

[Řešení:  $\sqrt{6}$ .]

**Příklad 13.3:** Určete vzájemnou polohu rovin

(a)  $BEG$  a  $ACH$ ,

(a)  $BDE$  a  $AFH$ .

**Příklad 13.4:** Určete odchylku

(a) přímek  $AG$  a  $BD$ ,

(b) přímek  $AF$  a  $AH$ ,

(c) přímky  $CG$  a roviny  $BDE$ ,

(d) rovin  $AFG$  a  $BDE$ .

[Řešení: (a)  $\frac{\pi}{2}$ , (b)  $\frac{\pi}{3}$ , (c)  $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ , (d)  $\frac{\pi}{2}$ .]

**Příklad 13.5:** Určete objem čtyřstěnu (a)  $ABCE$  a (b)  $ACFH$ . [Řešení: (a)  $\frac{1}{6}$ , (b) ...]