1. vnitrosemestrální písemná práce z MIN101, podzim 2023

Datum: 26. 10. 2023

Příklad 1 (1b)**.** Nalezněte $x \in \mathbb{C}$ splňující rovnici $x^2 = -i$.

Řešení. Nejprve nalezneme goniometrický tvar komplexního čísla

$$-i = \cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2}. \quad (0{,}5\text{b})$$

Teď využijeme Moivrovi věty (naopak), tedy napíšeme si obecně $x = \rho \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $\rho > 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$, a pokračujeme

$$x^2 = \rho^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = \cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2} \ (= -i).$$

Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$$
$$2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, 1,$$

totiž jen pro tato dvě k dostáváme různé úhly v požadovaném intervalu. Máme tedy 2 řešení:

$$x_1 = \cos \tfrac{3\pi}{4} + i \sin \tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i, \quad (0{,}5\text{b})$$
$$x_2 = \cos \tfrac{7\pi}{4} + i \sin \tfrac{7\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i.$$

△

Příklad 2 (2,5b)**.** Rodina Pekařových dostala od známé 200 g kvásku na zadělávání chleba s tímto receptem:

Před každým pečením chleba kvásek rozdělte na poloviny do dvou nádob, ke každé přidejte 90 g vody a 45 g žitné mouky a zamíchejte. Jednu nádobu s kváskem uschovejte do lednice na příště, obsah druhé po rozkvašení použijte do těsta.

a) Napište rekurentní vzorec pro váhu uschovaného kvásek po n-tém pečení chleba.

b) Najděte explicitní vzorec (tj. vyjádřete váhu jako funkci proměnné n).

c) Zjistěte, na jaké hodnotě se váha kvásku po mnoha pečeních ustálí. Zdůvodnětě.

Řešení. a) Původní kvásek vždy rozpůlíme a ke každému přidáme 135 g, tedy

$$a_0 = 200, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 135. \quad (1b)$$

b) Buď si pamatujeme jako vzoreček nebo si odvodíme:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_{n-2}}{2} + 135\right) + 135 = \frac{a_{n-2}}{2^2} + 135 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \dots = \frac{a_0}{2^n} + 135 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{200}{2^n} + 135 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{200}{2^n} + 270 \cdot (1 - \frac{1}{2^n}) = 270 - \frac{70}{2^n}. \quad (1\text{b}) \end{aligned}$$

c) U explicitního vzorečku vidíme, že člen $\frac{70}{2^n}$ je pro hodně velká n blízký nule, tedy hmotnost kvásku se ustálí na 270 g. (0,5b)

Případný druhý možný argument je, že když hmotnost 270 g rozpůlíme a přidáme 135 g, tak dostaneme opět 270 g, tedy tuto hodnotu nemůžeme překročit (pod touto hodnotou nám navíc hmotnost postupně přibývá a nad ní by nám ubývala). $\triangle$

Příklad 3 (3b)**.** 20 žáků čtvrté třídy základní školy jde s paní učitelkou do divadla. Všichni žáci mají místa vedle sebe v jedné řadě a paní učitelka (která sedí v řadě za nimi) je náhodně do této řady posazuje.

Mařence se ve třídě líbí Frantík a Petřík. Jaká je pravděpodobnost, že vedle alespoň jednoho z nich bude sedět?

[Nápověda: Můžete si označit jako jev A, že napravo od Mařenky sedí nějaký její oblíbenec a jev B, že sedí nalevo od ní.]

Řešení. Pravděpodobnost jevu A a jevu B je zřejmě stejná. Počet všech možných rozesazení žáků je zřejmě $20!$. Počet příznivých možností pro jev A je

$$19 \cdot 2 \cdot 18!\,,$$

protože je 19 míst, kam si může Mařenka sednout, aby mohl někdo sedět napravo od ní (vyloučili jsme levé krajní sedadlo), jsou 2 možnosti, jaký oblíbenec si napravo od ní sedne, a je $18!$ možností, jak si může posedat zbytek. Pravděpodobnost jevu A i B je tedy

$$P(A) = P(B) = \frac{19 \cdot 2 \cdot 18!}{20!} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}. \quad \text{(1b)}$$

Nás zajímá jev $A \cup B$, vyjadřující, že Mařenka má oblíbence nalevo od sebe, napravo, či dokonce z obou stran. Možnost „oblíbenci z obou stran“ je započítána jak v pravděpodobnosti jevu A, tak v pravděp. jevu B. Pro spočítání $P(A \cup B)$ tedy použijeme princip inluze exkluze, k němuž napřed musíme spočítat pravděp. průniku

$$P(A \cap B) = \frac{18 \cdot 2 \cdot 17!}{20!} = \frac{2}{20 \cdot 19} = \frac{1}{190}, \quad \text{(1b)}$$

protože máme 18 míst, kde může Mařenka sedět (vyloučili jsme obě krajní sedadla), 2 možnosti, kdo bude po pravici a kdo po levici, a pak zbývá rozesadit 17 zbylých žáků.

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{190} = \frac{37}{190}. \quad \text{(1b)}$$ $\triangle$

Příklad 4 (3,5b)**.** V rovině $\mathbb{R}^2$ máme zadány body $A = [-1, -3]$, $B = [7, 1]$, $C = [0, 11]$, které jsou vrcholy trojúhelníku $\triangle ABC$.

a) Určete obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

b) Nalezněte souřadnice těžiště T trojúhelníku $\triangle ABC$.

c) Nalezněte parametrickou rovnici přímky q, která prochází bodem T a je rovnoběžná se stranou AB trojúhelníku $\triangle ABC$.

d) Určete souřadnice průsečíku přímky q se stranou BC trojúhelníku $\triangle ABC$.

Řešení. a) Spočítáme vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ a z nich obsah $S = \frac{1}{2} \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = [7, 1] - [-1, -3] = (8, 4)\,, \quad \overrightarrow{AC} = C - A = [0, 11] - [-1, -3] = (1, 14)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (8 \cdot 14 - 4 \cdot 1) = \frac{1}{2}(112 - 4) = \frac{108}{2} = 54 \quad \text{(1b)}$$

b) Spočítáme (např.) střed strany AB, ozn. S_{AB}, a tečna bude ležet ve dvou-třetinách úsečky CS_{AB}.

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{[-1,-3]+[7,1]}{2} = \left[\tfrac{6}{2}, \tfrac{-2}{2}\right] = [3,-1]$$

$$\begin{aligned} T &= C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CS_{AB}} = C + \frac{2}{3}(S_{AB} - C) \\ &= C + \frac{2}{3}S_{AB} - \frac{2}{3}C = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}S_{AB} \\ &= [0, \tfrac{11}{3}] + [2, \tfrac{-2}{3}] = [2,3] \qquad (1\text{b}) \end{aligned}$$

Samozřejmě druhá možnost by byla najít T jako průsečík přímek (třeba) CS_{AB} a AS_{BC}.

c) Přímka q je rovnoběžná se stranou AB, tedy bude mít směrový vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$q\colon T + t\cdot\overrightarrow{AB} = [2,3] + t\,(8,4) \quad (0{,}5\text{b})$$

d) Vyjádříme si parametrickým předpisem přímku BC

$$BC\colon B + s\cdot\overrightarrow{BC} = [7,1] + s\,(-7,10)$$

a spočítáme průnic s přímkou q.

$$[2,3] + t\,(8,4) = [7,1] + s\,(-7,10)$$
$$t\,(8,4) + s\,(7,-10) = [5,-2]$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 7 & 5 \\ 4 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -10 & -2 \\ 0 & 27 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Průnik tedy nastává pro $s = \frac{1}{3}$.

$$q \cap BC\colon [7,1] + \tfrac{1}{3}(-7,10) = \left[7 - \tfrac{7}{3}, 1 + \tfrac{10}{3}\right] = \left[\tfrac{14}{3}, \tfrac{13}{3}\right] \quad (1\text{b})$$

$\triangle$