2. vnitrosemestrální písemná práce z MIN101, podzim 2023

Jméno: Datum: 29. 11. 2023

UČO:

Příklad 1 (3b)**.** Pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvažujme vektorový podprostor $V_a \subseteq \mathbb{R}^4$, kde

$$V_a = \langle (1,0,-1,4-a), (2,0,-2,5-a), (-1,-1,a,-2), (0,-1,a-1,-1) \rangle.$$

a) Z množiny generátorů vyberte bázi podprostoru V_a pro obecný parametr a.

b) Nalezněte parametr $a_0 \in \mathbb{R}$ takový, že $\dim V_{a_0} = 2$.

c) Zjištěné dva bázové vektory V_{a_0} doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Označme si vektory generující V_a postupně v_1, v_2, v_3, v_4. Vektory jsou lineárně nezávislé pokud následující rovnice má jednoznačné řešení, a to nulové

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = 0.$$

Řešme tedy tuto výše uvedenou rovnici. Je to v podstatě soustava čtyř rovnic (pro každou souřadnici) a o čtyřech neznámých $a_1, \dots, a_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & a & a-1 \\ 4-a & 5-a & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{(i)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & -3+a & 2-a & -1 \end{pmatrix} \overset{(ii)}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{-3+a} & 2-a & -1 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řádkové operace jsou postupně: (i) přičtení 1. řádku ke 3. řádku, odečtení $(4-a)$-násobku 1. řádku od 4. řádku; (ii) přičtení $(a-1)$ násobku 2. řádku ke 3. řádku[1], přemístění 4. řádku mezi 1. a 2. řádek.

Ve sloupcích, ve kterých se nachází vedoucí prvek některého řádku, jsou lineárně nezávislé vektory[2], přičemž vektor příslušící druhému sloupečku je lineárně nezávislý jen tehdy, když $a \neq 3$.

Báze V_a pro $a \neq 3$ je (v_1, v_2, v_3). Pro $a_0 = 3$ je prvek v poslední matici $-3 + a = 0$, a proto obsahuje jen dva vedoucí prvky, tudíž V_{a_0} má bázi (v_1, v_3) a dimenzi 2.

Pro doplnění báze na bázi celého $\mathbb{R}^4$ si dopíšeme vedle v_1, v_3 standardní bázi $\mathbb{R}^4$, tj. vektory e_1, e_2, e_3, e_4, a vybereme vektory, které jsou lineárně nezávislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Báze V_{a_0} doplněná na bázi $\mathbb{R}^4$ je tedy (v_1, v_3, e_1, e_2). △

[1] Uvědomme si, že ve druhé matici můžeme „vynulovat“ 3. řádek, i kdyby $a = 1$, protože to by již byl tento řádek nulový, avšak naopak 2. řádek bychom mohli vynulovat jen pokud $a \neq 1$.

[2] Když totiž řešíme soustavu rovnic tak za proměnnou v sloupečku, kde *není* vedoucí prvek můžeme zvolit libovolný parametr. Mimo jiné můžeme zvolit číslo 0, tedy při volbě $a_4 = 0$ má soustava $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ jediné řešení - to nulové.

Příklad 2 (2b)**.** Spočítejte determinant matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nabízí se dvě metoty, buď úprava elemetárními řádkovými operacemi[3], nebo Laplaceův rozvoj podle 2. sloupce (má nejvíce nul).

Řádkovými úpravami, přesněji přičítáním 1. a 2. řádku k ostatním, snadno dostaneme determinant

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (21 + 0 + (-24) - 72 - 9 - 0) = -84$$

△

Příklad 3 (2b)**.** Uvažujme podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaný vektory

$$w_1 = (1, -1, 1, 1), \quad w_2 = (1, 0, 2, -1), \quad w_3 = (0, 2, 1, 1).$$

a) Rozhodněte, které z vektorů w_1, w_2, w_3 jsou vzájemně kolmé.

b) Nalezněte ortogonální bázi podprostoru $U = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.

Řešení. Skalární součini $\langle w_1, w_2 \rangle = 2$, $\langle w_1, w_3 \rangle = 0$, $\langle w_1, w_2 \rangle = 1$, tedy pouze $w_1 \perp w_3$.

Abychom si zjednodušili počítání, pro Gramm-Schmidtův algoritmus budeme brát vektory v pořadí w_1, w_3, w_2, přičemž w_3 je již kolmý na w_1, takže pro něj není co počítat. Ortogonální báze je

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 = (1, -1, 1, 1) \\ u_2 &= w_3 = (0, 2, 1, 1) \\ u_3 &= w_2 - au_1 - bu_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle w_2, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \\ &= (1, 0, 2, -1) - \frac{2}{4} \cdot (1, -1, 1, 1) - \frac{1}{6} \cdot (0, 2, 1, 1) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{1}{6}(3, 1, 8, -10). \end{aligned}$$

△

Příklad 4 (3b)**.** Uvažujme lineární zobrazení $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako symetrie podle přímky

$$p \colon 2x - 3y = 0.$$

a) Nalezněte matici lineárního zobrazení φ ve standardní bázi.

b) Nalezněte vektor w' symetrický podle přímky p k vektoru $w = (2, 5)$.

[3] Nesmíme zapomenout na změnu znaménka při prohození dvou řádků a vytknutí příslušného čísla při vydělení řádku.

Řešení. Hledáme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}2$ takové, které směrový vektor $u = (3, 2)$ přímky p nechá nezměněný, tj. $\varphi(u) = u$, a normálový vektor $n = (2, -3)$ k přímce pošle na opačný vektor, tj. $\varphi(n) = -n$. Napíšeme-li do matice, co se na co zobrazí, řádkovými úpravami zjistíme, čemu odpovídá $\varphi(e_1)$ a $\varphi(e_2)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ n & \varphi(n) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ -6 & 9 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 13 & 12 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \frac{39-24}{13} & \frac{26+10}{13} \\ 0 & 1 & \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & 1 & \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \end{array}\right)$$

Transponováním (převrácením podle diagonály) poslední matice napravo dostaneme matici zobrazení φ ve standardní bázi.

$$A = (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Obraz vektoru w nalezneme jednoduše vynásobením maticí zobrazení.

$$w' = \varphi(w) = Aw = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{70}{13} \\ -\frac{1}{13} \end{pmatrix} \qquad \triangle$$