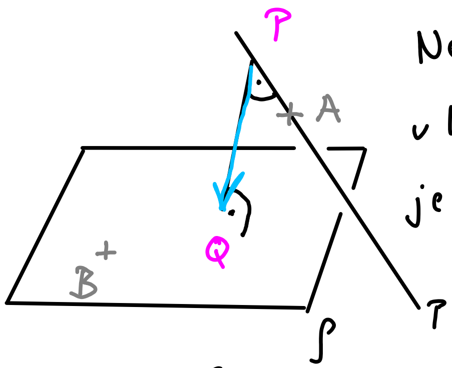
Uvažme přímku $p': \underbrace{[0,1,0,0]}_{=:A} + a\underbrace{(0,1,1,0)}_{=:u'}$

a rovinu $\rho: \underbrace{[1,1,1,1]}_{=:B} + b\underbrace{(1,1,1,0)}_{=:v} + c\underbrace{(0,1,1,1)}_{=:w}$,
které jsou vzájemně mimoběžné.

Určete vzdálenost p' od ρ a nalezněte body P, Q v nichž se vzdálenost realizuje.



Nejkratší vzdálenost mezi ρ a p nastává v bodech $P \in p$, $Q \in \rho$ takových, že jejich spojnice je kolmá na oba podprostory, tj. $\overrightarrow{PQ} \in (Z(p) + Z(\rho))^{\perp}$.

Dva možné způsoby výpočtu:

a) Vyjádříme si body $P \in p$, $Q \in \rho$ jako obecné body těchto podpr. a řešíme rovnici získanou podmínkou kolmosti.
Zde nejdříve nalezneme P, Q, poté určíme délku $|\overrightarrow{PQ}|$.

b) Spočítáme kolmou projekci $\overrightarrow{AB}$ do $(Z(p)+Z(\rho))^{\perp}$.
Zde hned dostaneme vektor $\overrightarrow{PQ}$ a lehce spočítáme vzdálenost $|\overrightarrow{PQ}|$, ale body P, Q samotné musíme dopočítat.
Tento postup je výhodný, když nepotřebujeme znát samotné body, kde se vzdálenost realizuje.

Postup a):

$$P = A + a \cdot u'$$
$$Q = B + b \cdot v + c \cdot w$$

$$\overrightarrow{AB} = [1,1,1,1] - [0,1,0,0] = (1,0,1,1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (Q - P) = \underbrace{(B - A)}_{=\overrightarrow{AB}} + b\,v + c\,w + a\cdot(-u')$$

$$(Z(p)+Z(\rho))^{\perp}: \begin{array}{c} u' \to \\ v \to \\ w \to \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:
$$\langle \underbrace{(0,-1,1,0)}_{=:k} \rangle = (Z(p)+Z(\rho))^{\perp}$$

$$\overrightarrow{PQ} \in (Z(p)+Z(\rho))^{\perp} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = t \cdot k \to b\,v + c\,w + a\,(-u') + t(-k) = -\overrightarrow{AB}$$

Vyřešíme rovnici $b v + c w + a(-u') + t k = -\vec{AB}$

$$
\begin{array}{cccc|c} v & w & -u' & -k & -\vec{AB} \end{array}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad
\begin{array}{cccc} b & c & a & t \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)
$$

$b = -1$
$c = -1$
$a = -2 + t = -3/2$
$t = \frac{1}{2}$

Zjistili jsme $\vec{PQ} = t\,k = \frac{1}{2} \cdot (0,-1,1,0) = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\underline{P} = A + a \cdot u' = [0,1,0,0] - \frac{3}{2} \cdot (0,1,1,0) = \underline{\underline{[0, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, 0]}}$

$\underline{Q} = B + b \cdot v + c \cdot w$

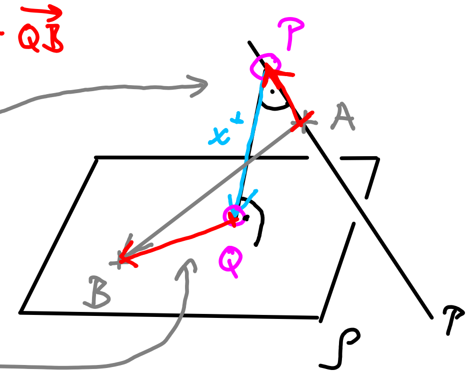
$= [1,1,1,1] - 1 \cdot (1,1,1,0) - 1 \cdot (0,1,1,1) = \underline{\underline{[0,-1,-1,0]}}$

$\underline{\underline{\|\vec{PQ}\|}} = \|t \cdot k\| = t \cdot \|k\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

Postup b) Spočítáme kolmou projekci $\vec{AB}$

$\vec{AB} = x + x^{\perp} \overset{\text{dle obr.}}{=} \vec{AP} + x^{\perp} + \vec{QB}$

$x \in Z(p) + Z(\rho)$, $\quad x^{\perp} \in (Z(p) + Z(\rho))^{\perp}$



$x = \underbrace{a u' + b v}_{\vec{QB}} + \overbrace{c w}^{\vec{AP}}$

$(Z(p) + Z(\rho))^{\perp}$: $\begin{array}{c} u' \to \\ v \to \\ w \to \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots$

$x^{\perp} = t \cdot k = t \cdot (0,-1,1,0)$

řešení: $\langle \underbrace{(0,-1,1,0)}_{=:k} \rangle = (Z(p) + Z(\rho))^{\perp}$

Nyní máme na výběr řešit soustavu $\vec{AB} - x \perp u, v, w$

nebo rovnici $\vec{AB} - x^{\perp} \perp k$

jednodušší $\to$ $\langle \vec{AB} - t \cdot k, k \rangle = 0$

$\langle \vec{AB}, k \rangle - t \langle k, k \rangle = 0$

$$t = \frac{\langle \vec{AB}, k \rangle}{\langle k, k \rangle} = \frac{\langle (1,0,1,1), (0,-1,1,0) \rangle}{\langle (0,-1,1,0), (0,-1,1,0) \rangle} = \frac{1}{2}$$

$\vec{PQ} = x^{\perp} = t \cdot k = \frac{1}{2} \cdot (0,-1,1,0) = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\|x^{\perp}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nyní potřebujeme zjistit P a Q, k tomu potřebujeme zjistit ty červené šipky na obrázku výše.

$$x = a\,u' + b\,v + c\,w = \overrightarrow{AB} - x^{\perp} = (1,0,1,1) - \left(0,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right) = \left(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} a = -3/2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}$$

$$\underline{P} = A + \overrightarrow{AP} = A + a \cdot u' = [0,1,0,0] - \tfrac{3}{2}\cdot(0,1,1,0) = \underline{\left[0,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},0\right]}$$

$$\underline{Q} = B + (-\overrightarrow{QB}) = [1,1,1,1] - \left(1\cdot(1,1,1,0) + 1\cdot(0,1,1,1)\right) = \underline{[0,-1,-1,0]}$$