1. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2021 – 15. 10. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dány body A, B, C, kde

$$A = [12, 10], \quad B = [28, 22] \ \text{ a } \ C = [20, 18].$$

Uvažujme přímku p procházející body A a B.

a) Určete obecnou rovnici (tj. implicitní popis) přímky p.

b) Určete bod D ležící na přímce p takový, že $||AD|| = 15$. Určete všechna řešení (existuje-li jich více).

c) Určete vnitřní úhel trojúhelníku ABC u vrcholu C.

d) Určete obsah trojúhelníku ABC.

2. (5 bodů) Ve sportovním sedmičlenném týmu jsou 4 dívky a 3 chlapci, mezi nimi je Adam, Eva a Lenka.

(i) Trenér seřadí děti vedle sebe do řady.

a) Kolika způsoby to může trenér udělat tak, aby Adam a Eva nestáli vedle sebe?

b) Kolika způsoby to může trenér udělat tak, aby alespoň dva z trojice Adam, Eva a Lenka stáli vedle sebe?

(ii) Dále trenér seřadí děti do řady takovým způsobem, že se dívky a chlapci střídají (tj. chlapci sousedí pouze s dívkami a dívky sousedí pouze s chlapci).

c) Kolik existuje celkem takových seřazení, při kterých stojí Adam vedle Evy?

d) S jakou pravděpodobností bude Adam stát vedle Evy za předpokladu, že Lenka je první zleva?

Zde samozřejmě předpokládáme, že všechny děti jsou navzájem rozlišitelné. Výsledek stačí napsat pomocí kombinačních čísel nebo faktoriálů, tj. není třeba ho vyčíslovat.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

a) **[1.5b]** Parametrický popis přímky p je $A + tv$, kde $v = B - A = (16, 12) = 4(4, 3)$, tj. $p : [12, 10] + t(4, 3)$, [0.5b]. Její normálový vektor je tedy například vektor $(3, -4)$, tj. rovnice této přímky bude tvaru $3x - 4y + a = 0$, [0.5b]. Parametr $a \in \mathbb{R}$ určíme z vlastnosti $A = [12, 10] \in p$, což znamená $3 \cdot 12 - 4 \cdot 10 + a = 0$, tj. $a = 4$. Hledaná rovnice je tedy $3x - 4y + 4 = 0$, [0.5b].

b) **[1.5b]** Za směrový vektor přímky p může vzít $w = (4, 3)$, kde $||w|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Bod $D \in p$ se tedy od bodu A „liší" o vektor $3w$ (protože $||3w|| = 15$) a existují dvě řešení $A \pm 3w$ [0.5b za úvahu]. První řešení je bod $D_1 = A + 3w = [12, 10] + (12, 9) = [24, 19]$ a to druhé je bod $D_2 = [12, 10] - (12, 9) = [0, 1]$, [0.5b za každé řešení].

c) **[1b]** Pro výpočet úhlu u vrcholu C můžeme nahradit vektor $\overrightarrow{CA} = (-8, -8)$ jeho (kladným!) násobkem $(-1, -1)$ a podobně vektor $\overrightarrow{CB} = (8, 4)$ vektorem $(2, 1)$. Hledaný úhel γ pak splňuje

$$\cos \gamma = \frac{\langle (-1, -1), (2, 1) \rangle}{||(-1, -1)|| \cdot ||(2, 1)||} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{5}},$$

tedy $\gamma = \arccos(-\frac{3}{\sqrt{10}})$.

d) **[1b]** Hledaný obsah S spočteme například použitím vektorů $\overrightarrow{CA} = (-8, -8)$ a $\overrightarrow{CB} = (8, 4)$,

$$S = \tfrac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} | - 32 + 64| = 16.$$

2. [5 bodů]

a) **[1b]** Stojí-li Adam a Eva vedle sebe, můžeme tuto dvoji označit symbolem „AE" nebo „EA". Takových možností je $2 \cdot 6!$. Výsledek tedy je $7! - 2 \cdot 6! = 5 \cdot 6!$.

b) **[1.5b]** Použijeme princip inkluze a exkluze. Uvažujme množinu způsobů $M_{A,E}$, ve kterých Adam a Eva stojí vedle sebe a podobně množiny $M_{A,L}$ a $M_{E,L}$. Tedy potřebujeme určit počet prvků ve sjednocení $M_{A,E} \cup M_{A,L} \cup M_{E,L}$. Podle části a) máme $|M_{A,E}| = |M_{A,L}| = |M_{E,L}| = 2 \cdot 6!$, [0.5b]. Dále $M_{A,E} \cap M_{A,L}$ jsou případy, kde Adam stojí mezi Evou a Lenkou, což tvoří trojici „EAL" nebo „LAE". Těchto případů je $2 \cdot 5!$, a podobně pro další dva průniky dvou množin, [0.5b]. Jelikož $M_{A,E} \cap M_{A,L} \cap M_{E,L} = \emptyset$, výsledek je

$$|M_{A,E} \cup M_{A,L} \cup M_{E,L}| = 2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! - 2 \cdot 5! - 2 \cdot 5! - 2 \cdot 5! + 0 = 30 \cdot 5! \;, \quad [0.5b].$$

c) **[1b]** Střídání znamená schéma <u>D</u>ívek a <u>C</u>hlapců DCDCDCD. Dvojici sousedních pozic lze vybrat šesti způsoby a každá taková volba určuje jednoznačně pozici Adama a Evy, přičemž pro ostatní je $3! \cdot 2!$ možností. Celkem je tedy $6 \cdot 3! \cdot 2! = 72$ možností, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

d) **[1.5b]** Jedná se o podmíněnou pravděpodobnost. Pro jev A „Adam stojí vedle Evy" a jev B „Lenka je první zleva" potřebujeme určit $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, kde $P(B) = \frac{1}{4}$. Podle tří pozic, na kterých může Adam stát, dostáváme

$$P(A \cap B) = \frac{2! \cdot 2! + 2 \cdot 2! \cdot 2! + 2 \cdot 2! \cdot 2!}{4! \cdot 3!} = \frac{5}{36}.$$

Tedy $P(A|B) = \frac{5}{9}$.