2. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2021 – 26. 11. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Nechť φ je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je kolmou projekcí na rovinu $-x + y + 2z = 0$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

2. (5 bodů) Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3a+1 & -a+1 & -1 \\ -a+1 & 3a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Určete tento parametr tak, aby

a) matice A měla nulový determinant,

b) matice A měla vlastní číslo 1,

c) existovalo jediné vlastní číslo,

d) vektor $(1, 0, 0)$ byl vlastním vektorem matice A a určete příslušné vlastní číslo.

Napište vždy všechna řešení, je-li jich více. Jestliže některá z částí a) – d) nemá řešení, zdůvodněte, proč tomu tak je.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů] Označme $v_1 = (-1, 1, 2)$ normálový vektor roviny a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1: např. $v_2 = (1, 1, 0)$ a $v_3 = (2, 0, 1)$, [1b za výběr vhodné báze]. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[1 bod]. Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$, [0.5 bodu], kde pro matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[0.5 bodu]. Matice $(id)_{\alpha,\epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$, [0.5 bodu za úvahu], tj.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \left((id)_{\epsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5 bodu]. Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[1 bod].

2. [5 bodů] Body jsou rozděleny takto: 1 bod za a), 2.5 bodu za b)+c) a 1.5 bodu za d).

a) **[1 bod]** Determinant matice A je

$$\det(A) = 2a \cdot \det \begin{pmatrix} 3a+1 & -a+1 \\ -a+1 & 3a+1 \end{pmatrix} = 2a[(3a+1)^2 - (-a+1)^2] = 2a \cdot 4a \cdot (2a+2) = \\ = 16a^2(a+1),$$

[0.5 bodu]. Existují tedy dvě řešení $a = 0$ a $a = -1$, [0.5 bodu].

b), c) **[2.5 bodu]** Charakteristický polynom matice A je

$$\det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 3a+1-\lambda & -a+1 & -1 \\ -a+1 & 3a+1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2a-\lambda \end{pmatrix} = \\ = (2a-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3a+1-\lambda & -a+1 \\ -a+1 & 3a+1-\lambda \end{pmatrix} = (2a-\lambda)[(3a+1-\lambda)^2 - (a-1)^2] = \\ = (2a-\lambda)(4a-\lambda)(2a+2-\lambda),$$

[0.5 bodu], kde E_3 je jednotková matice 3x3. Matice A tedy má vlastní číslo $\lambda = 1$, jestliže $(2a-1)(4a-1)(2a+2-1) = 0$, část b) má proto tři řešení $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\}$, [1 bod]. Obecně má matice A vlastní čísla $\lambda \in \{2a, 4a, 2a+2\}$. Mají-li být tato vlastní čísla stejná, nutně $2a = 4a$ a $2a = 2a+2$. Jelikož $2a = 2a+2$ není nikdy splněno, část c) nemá řešení, [1 bod].

Pozn.: Část b) lze též počítat přímo, tj. $\det(A - E_3) = (2a-1)(4a-1)(2a+2-1)$, [0.5 bodu], a tedy $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\}$, [1 bod].

d) **[1.5 bodu]** Matice A má zadaný vlastní vektor, jestliže

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & -a+1 & -1 \\ -a+1 & 3a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[0.5 bodu]. Vynásobením matice a vektoru na levé straně a porovnáním s pravou stranou dostaneme soustavu rovnic $3a+1 = \lambda$ a $-a+1 = 0$, [0.5 bodu]. Ta má jediné řešení $a = 1$ a $\lambda = 4$, což je hledané vlastní číslo, [0.5 bodu].