1. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2021 – 6. 1. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány body A, B, C a O,

$$A = [2, 1, 0], \quad B = [3, 3, 2], \quad C = [1, -3, 0], \quad O = [0, 0, 0].$$

Dále uvažme přímku p procházející body A a B a rovinu ρ, která prochází body A, B a C.

- **a)** Určete vzdálenost bodu C od přímky p.
- **b)** Určete obsah trojúhelníku ABC.
- **c)** Určete rovnici (tj. implicitní popis) roviny ρ.
- **d)** Určete objem čtyřstěnu $ABCO$.
- **e)** Určete parametrický popis roviny σ, která je rovnoběžná s přímkou p a obsahuje osu z.

2. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete bod $A \in p$ a bod $B \in q$ tak, že přímka procházející body A a B je kolmá k přímkám p, q:

$$p : [3, 5, 2] + r(1, 0, 1), \qquad q : [4, -2, 1] + s(4, 2, 2).$$

3. (5 bodů) Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- a) Určete matici A této kvadratické formy ve standardní bázi.
- b) Najděte nějakou polární bázi β kvadratické formy f a napište matici B této formy v bázi β.
- c) Rozhodněte, zda je kvadratická forma f pozitivně či negativně definitní či semidefinitní nebo indefinitní (nebo ani jedno z předchozího).

4. (5 bodů) Uvažujme následující příklad jako Leslieho model růstu.

Pan Kočka chová myši. Má je rozdělené do tří skupin podle věku: v první skupině jsou nejmladší myši ve věku do 1 měsíce, v druhé skupině má myši ve věku 1-2 měsíce a ve třetí skupině má myši ve věku 2-3 měsíce. Myši starší než tři měsíce prodává farmaceutické firmě na testování kosmetiky. Pan Kočka dlouhodobým pozorováním porodnosti a úmrtnosti zjistil následující údaje. Během každého měsíce zemře polovina ve skupině nejmladších myší, ale myši ve věkové skupině 1-2 měsíce jsou odolnější a všechny přežijí. Dále myši v nejmladší skupině mají porodnost $\frac{1}{2}$ (vzhledem k počtu myší v této skupině), ve věkové skupině 1-2 měsíce mají pětinásobnou porodnost (vzhledem k počtu myší v této skupině) a ve věkové skupině 2-3 měsíce mají dvojnásobnou porodnost (vzhledem k počtu myší v této skupině).

- a) Dokažte, že se chov rozšiřuje a určete k jakému poměru se blíží počty myší v jednotlivých věkových skupinách. (Napovězme, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou racionální.) Dále rozhodněte, zda je matice Leslieho modelu primitivní.
- b) Pan Kočka plánuje, že by některé myši z věkové skupiny do 1 měsíce na konci každého měsíce prodával jako domácí mazlíčky. Jakou část by jich měl prodat, aby jeho chov byl stabilizovaný?

Řešení a bodování:

1. **[5 bodů]** Bodování: a+b dohromady 2 body; c,d,e každá část 1 bod.

a) Parametrický popis přímky p je $A + r\overrightarrow{AB} = [2,1,0] + r(1,2,2)$. Potřebujeme najít bod $R \in p$ takový, že $\overrightarrow{CR} \perp \overrightarrow{AB}$; pak je hledaná vzdálenost p od C rovna délce $||\overrightarrow{CR}||$. Jelikož bod R je tvaru $R = [2+r, 1+2r, 2r]$, máme $\overrightarrow{CR} = (1+r, 4+2r, 2r)$. Podmínka kolmosti znamená

$$0 = \langle (1+r, 4+2r, 2r), (1,2,2) \rangle = (1+r) + 2(4+2r) + 2 \cdot 2r = 9r + 9,$$

tj. $r = -1$. Tedy $||\overrightarrow{CR}|| = ||(0,2,-2)|| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, což je hledaná vzdálenost, [0,5 bodu za určení parametrického popisu přímky p + 0,5 bodu za postup + 0,5 bodu za správný výsledek].

b) Platí $||\overrightarrow{AB}|| = ||(1,2,2)|| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Bereme-li úsečku AB jako základnu trojúhelníku ABC, pak jeho výška je $2\sqrt{2}$ podle části a). Obsah tedy je $\frac{3 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, [0,5 bodu].

c) Zaměření roviny ρ je určeno vektory $\overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ a $\overrightarrow{AC} = (-1,-4,0)$. Normálový vektor n roviny ρ splňuje $\langle n, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$ a $\langle n, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$. Vztah $\langle n, (-1,-4,0) \rangle = 0$ říká, že $n = (4,-1,a)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ (až na násobek). Z druhého vztahu $\langle n, (1,2,2) \rangle = \langle (4,-1,a), (1,2,2) \rangle = 0$ dopočítáme $a = -1$. Rovnice roviny ρ je tedy $4x - y - z + b = 0$, kde dosazením souřadnic např. bodu $A = [2,1,0] \in \rho$ dostaneme $4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + b = 0$, tj. $b = -7$. Rovina ρ má tedy rovnici $4x - y - z - 7 = 0$, [0,5 bodu za postup + 0,5 bodu za správný výsledek].

d) Hledaný objem V je určený vztahem

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} |2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1| = \frac{7}{3},$$

[0,5 bodu za postup + 0,5 bodu za správný výsledek].

e) Platí $O \in \sigma$, přičemž zaměření této roviny je určené vektorem $\overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ a dále směrovým vektorem osy z, tj. $(0,0,1)$. Hledaný parametrický popis tedy je $[0,0,0] + t(1,2,2) + s(0,0,1)$, [0,5 bodu].

2. **[5 bodů]** Označme $v = (a,b,c)$ směrový vektor $v = \overrightarrow{AB}$. Vektor v je kolmý na vektory $(1,0,1)$ a $(4,2,2)$, [0.5b]. Podmínky $v \perp (1,0,1)$ a $v \perp (4,2,2)$ jsou ekvivalentní rovnicím $a + c = 0$ a $4a + 2b + 2c = 0$, tedy $v = t(1,-1,-1)$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$, [1.5b]. Platí $A = [3,5,2] + r(1,0,1)$ (neboť $A \in p$) a $B = [4,-2,1] + s(4,2,2)$ (neboť $B \in q$). Jelikož $B = A + t(1,-1,-1)$ (neboť $v = \overrightarrow{AB}$), dostáváme

$$[3,5,2] + r(1,0,1) + t(1,-1,-1) = [4,-2,1] + s(4,2,2),$$

což znamená

$$r(1,0,1) + t(1,-1,-1) - s(4,2,2) = (1,-7,-1),$$

[1b]. Maticový zápis této soustavy rovnic je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a její řešení je $r = 6$, $t = 3$ a $s = 2$, [1b]. Tedy $A = [3,5,2] + 6(1,0,1) = [9,5,8]$, [0.5b] a $B = [4,-2,1] + 2(4,2,2) = [12,2,5]$, [0.5b].

3. **[5 bodů]**

a) Je to matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [0.5\text{b}].$$

b) Úpravou na čtverec dostaneme

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3)^2 + 2(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2 - \tfrac{5}{2}x_3^2, \quad [1.5b],$$

tj. $y_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = x_3$ jsou souřadnice v polární bázi β s maticí přechodu

$$(\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [0.5b]$$

Tato matice matice má inverzi

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} = \left((\mathrm{id})_{\beta,\epsilon}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [1b].$$

Báze β je tvořena sloupci předchozí matice, tj.

$$\beta = \left((1,0,0),(0,1,0),(1,-\tfrac{1}{2},1)\right), \quad [0.5b]$$

a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad [0.5b].$$

c) Z matice B vidíme, že kvadratická forma f je indefinitní, [0.5b].

4. [5 bodů]

a) Uvažujeme-li skupiny myší v pořadí (0-1 měsíc, 1-2 měsíce, 2-3 měsíce), má tento Leslieho model matici

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[1 bod]. Charakteristický polynom je $\det(L - \lambda E_3)$, kde E_3 je jednotková matice 3×3. Laplacovým rozvojem podle 3. řádku dostaneme

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 5 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(2\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 2\right),$$

[0.5 bodu]. Dominantní vlastní číslo je 2, [0.5 bodu]. (To lze najít Hornerovým schématem, kandidáti na kladný racionální kořen jsou pouze 1, 2 a $\frac{1}{2}$.) Potřebujeme najít vlastní vektor matice L příslušný vlastnímu číslu 2, což je vektor $(8,2,1)$, [0.5 bodu]. Struktura chovu se tedy blíží rozdělení $\frac{1}{8+2+1}(8,2,1) = (8/11, 2/11, 1/11)$, [0.5 bodu].

Matice L je primitivní, neboť všechny hodnoty na prvním řádku i těsně pod diagonálou jsou nenulové; alternativně se lehce ukáže, že matice L^3 je pozitivní, [0.5b]. Tedy jakákoliv počáteční věková struktura chovu konverguje k poměru $(8/11, 2/11, 1/11)$.

b) Na konci roku žije $\frac{1}{2}$ z myší ve skupině do 1 měsíce a označíme a část z nich, která bude rozdána. Tím dostaneme Leslieho model s maticí

$$L' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} - a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a tedy} \quad L' - E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} - a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož matice L' má mít vlastní číslo 1, musí být $\det(L' - E_3) = 0$, [1 bod]. Odtud se spočítá $a = \frac{3}{7}$, [0.5 bodu]. (Je tedy třeba rozdat $\frac{3}{7}$ z počtu myší v nejmladší věkové kategorii žijících na konci měsíce neboli $\frac{6}{7}$ z celkového počtu myší na začátku měsíce.)