2. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2021 – 26. 1. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujeme krychli $ABCDEFGH$ o jednotkové velikosti hrany, tj. $A = [0,0,0]$, $B = [1,0,0]$, $C = [1,1,0]$, $D = [0,1,0]$, $E = [0,0,1]$, $F = [1,0,1]$, $G = [1,1,1]$ a $H = [0,1,1]$. Na hraně BF označíme v jedné třetině bod $X = [1,0,\frac{1}{3}]$ a na hraně CG v polovině bod $Y = [1,1,\frac{1}{2}]$. Označme dále ρ rovinu procházející body A, X a Y.

a) Napište obecnou rovnici roviny ρ.

b) Určete souřadnice bodu Z, který je průsečíkem hrany DH a roviny ρ.

c) Určete vzdálenost vrcholu E od roviny ρ.

d) Porovnejte velikost úhlu $\measuredangle AXY$ a velikost úhlu $\measuredangle AZY$.

e) Určete objem pětistěnu $AXYZE$.

2. (5 bodů) Řešte lineární diferenční rovnici

$$x_n = 6x_{n-1} - 8x_n + 3n - 16$$

s počátečními podmínkami $x_1 = -1$ a $x_2 = 8$.

3. (5 bodů) Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 10x_3^2.$$

a) Určete matici A této kvadratické formy ve standardní bázi.

b) Najděte nějakou polární bázi β kvadratické formy f a napište matici B této formy v bázi β.

c) Rozhodněte, zda je kvadratická forma f pozitivně či negativně definitní či semidefinitní nebo indefinitní (nebo ani jedno z předchozího).

4. (5 bodů) Uvažme následující příklad jako Markovův proces.

V obci Liptákov jsou tři společenské podniky: hospoda Na Mýtince, hostinec U Sirotků a vinárna U Pavouka. Místní statistik Jára zjistil následující údaje. Obyvatel Liptákova, který tráví večer Na Mýtince, s pravděpodobností 1/4 bude následující večer opět Na Mýtince, s pravděpodobností 1/4 přejde k Pavoukovi a s pravděpodobností 1/2 stráví večer doma. Kdo tráví večer U Sirotků, bude s pravděpodobností 1/2 následující večer Na Mýtince a s pravděpodobností 1/2 přejde k Pavoukovi. Návštěvník vinárny U Pavouka bude s pravděpodobností 1/4 následující večer Na Mýtince, s pravděpodobností 1/4 U Sirotků, s pravděpodobností 1/4 opět U Pavouka a s pravděpodobností 1/4 zůstane doma. Kdo tráví večer doma, bude s pravděpodobností 1/4 trávit následující večer Na Mýtince, s pravděpodobností 1/4 bude U Sirotků, s pravděpodobností 1/4 bude U Pavouka a konečně s pravděpodobností 1/4 zůstane doma.

a) Jednou večer, po mnohaletém pobytu v Liptákově, si chce Jára zahrát šachy se svým sousedem Padevědem. S jakou pravděpodobností ho najde U Sirotků a s jakou pravděpodobností bude jeho soused doma?

b) Rozhodněte, zda je matice tohoto Markovova procesu primitivní.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů] Bodování: každá část za 1 bod.

a) Rovina obsahuje vektory $\overrightarrow{AX} = X - A = (1, 0, \frac{1}{3})$ a $\overrightarrow{AY} = Y - A = (1, 1, \frac{1}{2})$. Určíme v, normálový vektor roviny ρ, který je kolmý k těmto dvěma vektorům. Vektor v se spočítá z příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic nebo se „uhodne" následujícím způsobem: volíme třetí souřadnici 3 a první souřadnici -1, aby byl vektor v kolmý k $\overrightarrow{AX}$, a následně položíme druhou souřadnici v rovnu $-\frac{1}{2}$, aby byl vektor v kolmý k vektoru $\overrightarrow{AY}$. Dostáváme tedy vektor $v = (-1, -\frac{1}{2}, 3)$ a dále budeme pracovat s jeho minus dvojnásobkem $(2, 1, -6)$. Obecná rovnice ρ je tedy $2x + y - 6z = 0$, kde na pravé straně volíme konstantu 0, aby v rovině ρ ležel bod A.

b) Bod Z leží na přímce procházející body D a H, a proto má souřadnice $[0, 1, a]$, kde třetí souřadnici a zatím neznáme. Zároveň musí splňovat rovnici roviny ρ. Tedy $2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 6 \cdot a = 0$, a proto $a = \frac{1}{6}$. Vidíme tedy, že $Z = [0, 1, \frac{1}{6}]$.
Jiné řešení: Uvažme dvě rovnoběžné roviny dané stěnami $BCGF$ a $ADHE$. Průnik těchto rovin a roviny ρ tvoří proto dvojici rovnoběžek. Vektory $\overrightarrow{XY}$ a $\overrightarrow{AZ}$ jsou tedy navzájem svými násobky. Navíc oba tyto vektory spojují rovnoběžné stěny $ABFE$ a $DCGH$, a mají tudíž stejnou velikost. Vidíme tedy, že $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{XY} = Y - X = [1, 1, \frac{1}{2}] - [1, 0, \frac{1}{3}] = (0, 1, \frac{1}{6})$. Proto $Z = A + \overrightarrow{AZ} = [0, 0, 0] + (0, 1, \frac{1}{6}) = [0, 1, \frac{1}{6}]$. Z této úvahy také plyne, že čtyřúhelník $AXYZ$ je rovnoběžník.

c) Určíme projekci vektoru $z = \overrightarrow{AE} = (0, 0, 1)$ do podprostoru $Z(\rho)^{\perp} = \langle\{(2, 1, -6)\}\rangle$. Označme tuto projekci $p_z = a(2, 1, -6)$. Vektor $z - p_z$ má být kolmý k vektoru $(2, 1, -6)$. Spočítáme skalární součin vektorů $z - p_z$ a $(2, 1, -6)$:

$$\langle(2, 1, -6), (0, 0, 1) - a(2, 1 - 6)\rangle = \langle(2, 1, -6), (0, 0, 1)\rangle - a\langle(2, 1, -6), (2, 1, -6)\rangle = -6 - 41a = 0.$$

Odtud $a = -\frac{6}{41}$ a $p_z = \frac{6}{41}(-2, -1, 6)$. Velikost tohoto vektoru $\frac{6}{41} \cdot \sqrt{2^2 + 1 + 6^2} = \frac{6\sqrt{41}}{41}$ je hledaná vzdálenost.

d) Odchylka α vektorů $\overrightarrow{XA} = (-1, 0, -\frac{1}{3})$ a $\overrightarrow{XY} = Y - X = [1, 1, \frac{1}{2}] - [1, 0, \frac{1}{3}] = (0, 1, \frac{1}{6})$ se určí obvyklým vzorcem:

$$\cos\alpha = \frac{\langle(-1, 0, -\frac{1}{3}), (0, 1, \frac{1}{6})\rangle}{||(-1, 0, -\frac{1}{3})|| \cdot ||(0, 1, \frac{1}{6})||} = \frac{-\frac{1}{18}}{\frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{37}}{6}} = \frac{-1}{\sqrt{370}}.$$

Stejně vyjde podobný výpočet pro vektory $\overrightarrow{ZA} = (0, -1, -\frac{1}{6})$ a $\overrightarrow{ZY} = (1, 0, \frac{1}{3})$. Zkoumané úhly mají tedy stejnou velikost.
Jiné řešení: Z druhého řešení části b) víme, že čtyřúhelník $AXYZ$ je rovnoběžník. Úhly u protějších vrcholů mají tedy stejnou velikost.

e) Pětistěn je tvořen dvěma stejně velkými čtyřstěny $AXYE$ a $AYZE$. Objem čtyřstěnu $AXYE$ určíme pomocí determinantu vytvořeného z vektorů $\overrightarrow{AX} = (1, 0, \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AY} = (1, 1, \frac{1}{2})$ a $\overrightarrow{AE} = (0, 0, 1)$. Objem je proto

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

Objem pětistěnu je tedy $\frac{1}{3}$.

2. [5 bodů] Charakteristický polynom $\lambda^2 = 6\lambda - 8$ má kořeny 4 a 2, tedy obecné řešení zhomogenizované rovnice je $x_n = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n$, $A, B \in \mathbb{R}$, [1b]. Partikulární řešení zadané nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $x_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dosazením dostaneme

$$an + b = 6(a(n-1) + b) - 8(a(n-2) + b) + 3n - 16,$$

z čehož dopočítáme $a = 1$ a $b = -2$. Tedy obecné řešení zadané rovnice je

$$x_n = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n + n - 2, \quad [2b].$$

Počáteční podmínky $x_1 = -1$ a $x_2 = 8$ znamenají

$$x_1 = 4A + 2B - 1 = -1 \quad \text{a} \quad x_2 = 16A + 4B = 8.$$

Řešením této soustavy je $A = 1$ a $B = -2$. Výsledek tedy je

$$x_n = 4^n - 2^{n+1} + n - 2, \quad [2b].$$

3. [5 bodů]

a) Je to matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad [0.5b].$$

b) Úpravou na čtverec dostaneme

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_3)^2 + 4(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2, \quad [1.5b],$$

tj. $y_1 = x_1 - 3x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = x_3$ jsou souřadnice v polární bázi β s maticí přechodu

$$(\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [0.5b]$$

Tato matice matice má inverzi

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} = \big((\mathrm{id})_{\beta,\epsilon}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [1b].$$

Báze β je tvořena sloupci předchozí matice, tj.

$$\beta = \big((1,0,0), (0,1,0), (3, -\tfrac{1}{2}, 1)\big), \quad [0.5b]$$

a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0.5b].$$

c) Z matice B vidíme, že kvadratická forma f je pozitivně semidefinitní, [0.5b].

4. [5 bodů]

a) **[4.5 bodu]** Uvažujeme-li pořadí stavů: Na Mýtince, U Sirotků, U Pavouka, doma; jedná se o Markovův proces se (stochastickou) maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

[1.5b]. Je třeba najít vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 1, [0.5b za úvahu]. Hledáme tedy řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$B - E_4 = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_4 je jednotková matice 4×4. Její řešení je (až na násobek) vektor $v = (2, 1, 2, 2)$, [1b]. My ale potřebujeme pravděpodobnostní vektor, což je $w = \frac{1}{2+1+2+2}v = \frac{1}{7}(2,1,2,2) = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7})$, [0.5b]. Padevěda tedy Jára najde s pravděpodobností $\frac{1}{7}$ U Sirotků, [0.5b], a s pravděpodobností $\frac{2}{7}$ u něho doma, [0,5b].

b) **[0.5 bodu]** Matice B^2 je pozitivní, tady matice B je primitivní.