4. domácí úkol – MIN301 – podzim 2023 – odevzdat do **8.12.2023**

Vyřešte následující diferenciální rovnice s neznámou funkcí $y(x)$:

(a) $y' = (4x - y + 1)^2$, přičemž $y(0) = 7$;

(b) $y' = (4x - y + 1)^2$, přičemž $y(0) = 3$;

(c) $y' = \sin x(\sin^2 x - y)$, přičemž $y(0) = 0$.

U všech řešení určete maximální interval, na kterém je řešení definované.

Řešení:

(a,b) Po substituci $z(x) = 4x - y(x) + 1$ dostaneme rovnici $z' = 4 - z^2$, u které lze separovat proměnné ve tvaru $\frac{dz}{4-z^2} = dx$. Touto úpravou ovšem ztrácíme případy $z = \pm 2$, což jsou dvě konstantní řešení. Integrováním dostaneme $\frac{z+2}{z-2} = Ce^{4x}$, což zahrnuje řešení $z = -2$ jestliže uvažujeme libovolné $C \in \mathbb{R}$. Navíc tedy máme jen řešení $z = 2$. Další úpravou tedy dostaneme $z(x) = \frac{2(1+Ce^{-4x})}{1-Ce^{4x}}$ a dosazením $z(x) = 4x - y(x) + 1$ dostaneme výsledek: množina všech řešení je

$$y(x) = 4x + \tfrac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}, \ C \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad y(x) = 4x - 1.$$

Dosazením počátečních podmínek dostaneme řešení $y(x) = 4x + \frac{6+e^{4x}}{2-e^{4x}}$ definované na maximálním intervalu $(-\infty, \ln \sqrt[4]{2})$ v části (a) a $y(x) = 4x + 3$ definovaná na celé reálné ose v části (b).

(c) Jedná se o lineární rovnici $y' - y \sin x = \sin^3 x$. U rovnice bez pravé strany $y' - y \sin x = 0$ lze separovat proměnné, její obecné řešení je tvaru $y = Ce^{\cos x}$, $C \in \mathbb{R}$. (Pozor na konstantní řešení $y = 0$, které je při separací proměnných ztraceno.) Dále postupujeme variací konstanty, tj. uvažujeme $y = C(x)e^{\cos x}$ a dosadíme do rovnice s pravou stranou. Odtud se spočte $C'(x) = e^{-\cos x} \sin^3 x$. Při následném integrování se použije substitutce $z = \cos x$. Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je tvaru

$$y(x) = -(\cos x + 1)^2 + Ce^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínka $y(0) = 0$ znamená, že $C = \frac{4}{e}$, tj. výsledkem je funkce

$$y(x) = -(\cos x + 1)^2 + \tfrac{4}{e}e^{\cos x} = -(\cos x + 1)^2 + 4e^{\cos x - 1}$$

definovaná na celé reálné ose.