5. domácí úkol – MIN301 – podzim 2023 – odevzdat do **17.12.2023**

Nechť G je graf, který je stromem, přičemž právě 14 jeho vrcholů má stupeň 1 a všechny ostatní vrcholy mají stupeň buď 4 nebo 5. Rozhodněte, zda takový graf existuje. Jestliže ano, popište kolik je takových grafů až na izomorfismus.

Řešení: Označme n_1 počet vrcholů stupně 4 a n_2 počet vrcholů stupně 5. Pak počet hran je $\frac{1}{2}(4n_1 + 5n_2 + 14)$. Jelikož G je strom, je počet hran také roven $n_1 + n_2 + 14 - 1$. Tedy $\frac{1}{2}(4n_1 + 5n_2 + 14) = n_1 + n_2 + 13$, tj.

$$2n_1 + 3n_2 = 12, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0.$$

Tedy n_2 je sudé a $0 \le n_2 \le 4$, tj. dostáváme tři možnosti:

$$(n_1, n_2) \in \{(0,4), (3,2), (6,0)\}.$$

Pro všechny tři případy existuje graf splňující zadané parametry. Při popisu všech možností stačí uvažovat jen podgraf z vrcholů stupně 4 a 5 (to bude zase strom) a určit počet možností pro tento podgraf. Pro $(n_1, n_2) = (0, 4)$ jsou dvě neizomorfní možnosti (=počet stromů na čtyřech vrcholech), pro $(n_1, n_2) = (3, 2)$ je patnáct neizomorfních možností (existují tři stromy na pěti vrcholech, ale je více způsobů, jak označit jeho vrcholy třemi čtyřkami a dvěma pětkami) a pro $(n_1, n_2) = (6, 0)$ je pět neizomorfních možností (počet stromů na šesti vrcholech je šest, ale "hvězdice"má v centru vrchol stupně 5). Celkem tedy máme $2 + 15 + 5 = 22$ grafů až na izomorfismus.