Vnitrosemestrální písemka – MIN301 – podzim 2023 – 8. 11. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažme kružnici C a kruh K, obojí o poloměru 5 se středem v počátku. Dále mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$.

a) Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině C.

b) Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině K.

Zde uvažujeme kruh včetně hranice (což je kružnice), tj. $C \subseteq K$.

2. (5 bodů) V rovině uvažme oblast $A \subseteq \mathbb{R}^2$ omezenou křivkami $y = x^2$, $y = 2x$ a $y = 1$ v polorovině $y \leq 1$ a dále mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x, y) = x - y$. Nechť I je integrál $I = \iint_A f(x, y)\,dxdy$.

a) Načrtněte oblast A (tj. načrtněte zadané křivky a určete „vrcholy“ oblasti) a napište integrál I dvěma způsoby pomocí jednoduchých integrálů

$$\int_*^* \int_*^* f(x, y)\,dxdy \quad \text{a} \quad \int_*^* \int_*^* f(x, y)\,dydx$$

nebo součet takových integrálů. Zde je samozřejmě třeba určit chybějící meze integrálů.

b) Spočtěte integrál I.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

Zadané množiny jsou

$$C = \{[x,y] \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25\} \quad \text{a} \quad K = \{[x,y] \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 25\},\ [0.5\text{b}].$$

a) **[3b]** Určíme stacionární body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = (x^2 + y^2 - x - y) + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x - 1 + 2x\lambda = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2y - 1 + 2y\lambda = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 25 = 0,\ [1\text{b}]. \end{aligned}$$

Tato soustava má dvě řešení: $[\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}]$ a $[-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}]$, [0.5b]. Množina C je kompaktní, tj. funkce $f(x,y)$ na ní nabývá maxima a minima. Jelikož jsme našli právě dva stacionární body, jsou oba extrémy, [0.5b]. Podle

$$f(\tfrac{5}{\sqrt{2}}, \tfrac{5}{\sqrt{2}}) = 5 - 5\sqrt{2} \quad \text{a} \quad f(-\tfrac{5}{\sqrt{2}}, -\tfrac{5}{\sqrt{2}}) = 5 + 5\sqrt{2}$$

je v bodě $[\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}]$ minimum a v bodě $[-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}]$ maximum, [1b].

b) **[1.5b]** K výpočtu extrémů uvnitř kruhu nám stačí spočíst lokální extrémy bez jakéhokoliv omezení. V tomto případě jsou stacionární body dány vztahy

$$f_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = 2y - 1 = 0,$$

tj. je to jediný bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, [0.5b]. Matice druhých derivací

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní, [0.5b], tedy jde o lokální minimum. Jelikož bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ leží uvnitř kruhu a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ je menší než hodnota minima na kružnici (v bodě $[\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}]$), má funkce $f(x,y)$ na kruhu K minimum v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a maximum v bodě v bodě $[-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}]$, [0.5b].

2. [5 bodů]

a) **[3b]** Z obrázku [1b] přímo vidíme, že

$$I = \int_0^{1/2} \int_{x^2}^{2x} (x-y)\,dydx + \int_{1/2}^{1} \int_{x^2}^{1} (x-y)\,dydx \quad \text{nebo} \quad I = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x-y)\,dxdy,$$

[1b+1b].

c) **[2b]** S využitím například druhé možnosti v části (a) dostaneme

$$I = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[\tfrac{1}{2}x^2 - xy\Big]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}}\,dy = \ldots = -\tfrac{1}{40},$$

[1b za postup a 1b za správný výsledek].