2. termín zkoušky – MIN301 – podzim 2023 – 4. 1. 2024

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Uvažme funkci $z = f(x, y)$ zadanou implicitně vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

a) Rozhodněte, na okolí kterých bodů tvaru $(a, -a, b) \in \mathbb{R}^3$ zadává tento vztah funkci $z = f(x, y)$.

b) Určete lokální extrémy funkce f.

Poznámka: v části (b) není nutné přesně určit definiční obor funkce f, ale je třeba ověřit, že nalezené lokální extrémy do definičního oboru patří.

2. (5 bodů) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$$

v bodě $[1, 1]$.

3. (5 bodů)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8(x - 1)^2$.

c) Určete řešení rovnice $y''+3y'-4y = 8(x-1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{13}{4}$ a $y'(0) = 0$.

4. (5 bodů) V $\mathbb{R}^2$ uvažujme množinu $M_1 = \{(x, y) \mid y \leq x^2 + 1\}$ a dále trojúhelník M_2 s vrcholy $[-1, 0]$, $[1, 0]$ a $[1, 2]$. Položme $M := M_1 \cap M_2$.

a) Načrtněte množinu M a popište její hranici včetně „vrcholů“ (kde se protínají hraniční křivky).

b) Určete těžiště množiny M.

Řešení a bodování:

1. Označme zadaný vztah jako

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

a) **[1.5b]** Vztah $\varphi(x,y,z) = 0$ zadává funkci $z = f(x,y)$ právě, když

$$\varphi(x,y,z) = 0 \quad \text{a} \quad \varphi_z(x,y,z) = 2z - x - y + 2 \neq 0.$$

Druhá podmínka v bodech $(a,-a,b)$ znamená $b \neq -1$. Dosazením do první podmínky dostaneme $\varphi(a,-a,b) = 2a^2 + b^2 + 2b - 2 = 0$, tj. $b = -1 \pm \sqrt{3-2a^2}$. Společně s podmínkou $b \neq -1$ to znamená $a \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Jedná se tedy o body

$$\left(a, -a, \pm\sqrt{3-2a^2}\right), \quad a \in \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right).$$

b) **[3.5b]** Nulové parciální derivace

$$z_x = \tfrac{z-2x-2}{2z-x-y+2} = 0 \quad \text{a} \quad z_x = \tfrac{z-2y-y}{2z-x-y+2} = 0$$

společně s podmínkou $\varphi(x,y,z) = 0$ určují stacionární body

$$[-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}] \quad \text{a} \quad [-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}, -4-2\sqrt{6}].$$

Lehce se ověří, že v těchto bodech $\varphi_z(x,y,z) \neq 0$, tj. oba body skutečně patří do definičního oboru funkce f. Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \tfrac{(z_x-2)(2z-x-y+2)-(z-2x-2)(2z_x-1)}{(2z-x-y+2)^2}, \\ z_{xx} &= \tfrac{(z_y-2)(2z-x-y+2)-(z-2y-2)(2z_y-1)}{(2z-x-y+2)^2}, \\ z_{xy} &= \tfrac{z_y(2z-x-y+2)-(z-2x-2)(2z_y-1)}{(2z-x-y+2)^2}. \end{aligned}$$

Matice druhých parciálních derivací ve stacionárních bodech tedy jsou

$$d^2f(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad d^2f(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

V bodě $[-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}]$ je tedy lokální maximum a v bodě $[-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}]$ je lokální minimum.

2. **[5 bodů]** Požadovaný Taylorův polynom je obecně tvaru

$$T(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \tfrac{1}{2}[f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2].$$

Dosazením do prvních a druhých parciálních derivací dostaneme výsledek

$$T(x,y) = 1 + 3(y-1) + \tfrac{1}{2}[6(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2].$$

3. a) **[1.5b]** Diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$, který má kořeny -4 a 1. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-4x} + C_2e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) **[2.5b]** Rovnice je $y'' + 3y' - 4y = 8(x-1)^2$ má pravou stranu $4(x+1)^2 = 8x^2 - 16x + 8$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva. (Přesněji, pravá strana je tvaru $8(x^2-2x+1) \cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax+b) - 4(ax^2+bx+c) = -4ax^2 + (6a-4b)x + (2a+3b-4c) = 8x^2 - 16x + 8.$$

Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-4a = 8$, $6a - 4b = -16$, $2a + 3b - 4c = 8$, která má řešení $a = -2$, $b = 1$, $c = -\frac{9}{4}$. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2 + x - \frac{9}{4}$ a obecné řešení je,

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x - 2x^2 + x - \tfrac{9}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{9}{4} = -\tfrac{13}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + C_2 + 1 = 0.$$

Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = -1$, tedy hledané řešení je $y(x) = -e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$.

4. a) **[1.5b]** Trojúhelník je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou na přímce $y = x + 1$. Průnik této přímky s parabolou $y = x^2 + 1$ je tvořen body $[0, 1]$ a $[1, 2]$; tedy M vzniká z M_2 odstraněním „oblouku" paraboly mezi body $[0, 1]$ a $[1, 2]$. Vrcholy množiny M jsou $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ a $[1, 0]$.

b) **[3.5b]** Množinu M je vhodné rozdělit na M' pro $-1 \le x \le 0$ (to je trojúhelník) a M'' pro $0 \le x \le 1$. Platí

$$M' : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x + 1 \quad \text{a} \quad M'' : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 + 1.$$

Obsah S množiny M je

$$S = \iint_M dxdy = \iint_{M'} dxdy + \iint_{M''} dxdy = \int_{-1}^{0} \int_0^{x+1} dydx + \int_0^1 \int_0^{x^2+1} dydx = \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{11}{6}.$$

Dále

$$S_x = \iint_M xdxdy = \int_{-1}^{0} \int_0^{x+1} xdydx + \int_0^1 \int_0^{x^2+1} xdydx = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{12},$$

a

$$S_y = \iint_M ydxdy = \int_{-1}^{0} \int_0^{x+1} ydydx + \int_0^1 \int_0^{x^2+1} ydydx = \tfrac{1}{6} + \tfrac{14}{15} = \tfrac{11}{10}.$$

Tedy souřadnice těžiště $[x_0, y_0]$ jsou

$$x_0 = \frac{S_x}{S} = \frac{7}{22} \quad \text{a} \quad y_0 = \frac{S_y}{S} = \frac{3}{5}.$$