Matematická analýza 1

Posloupnosti

Petr Liška

Masarykova univerzita

22.11.2023

Posloupnost a její vlastnosti

Definice

Posloupnost je zobrazení $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jehož hodnoty značíme $a(n)$ nebo a_n. Hodnotu a_n nazýváme *n-tý člen posloupnosti* a celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

- *rostoucí*, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *shora ohraničená*, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *zdola ohraničená*, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *ohraničená*, jestliže je ohraničená shora i zdola.

Limita posloupnosti

Definice

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu, říkáme, že *konverguje*, a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $a_n \to A$ pro $n \to \infty$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $a_n > A$. Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Podobně definujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje*.

Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

„Bonusové“ vlastnosti limit

Věta

Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *a existuje* n_0 *tak, že pro každé* $n \geq n_0$ *je* $a_n \leq b_n$. *Pak platí*

1. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *pak i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
1. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *pak i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Věta

Nechť jsou dány konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Pak platí:*

1. *Jestliže* $a < b$, *pak existuje* n_0 *tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
2. *Jestliže existuje* n_0 *tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *je* $a_n \leq b_n$, *pak* $a \leq b$.

„Bonusové“ vlastnosti limit

Věta

Každá neklesající shora ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ *má vlastní limitu a platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.
Každá nerostoucí zdola ohraničená posloupnost $\{b_n\}$ *má vlastní limitu a platí* $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$.

Definice

Limitu $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo*.

Vybraná podposloupnost

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná podposloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta

Nechť $\{a_{n_k}\}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Hromadný bod posloupnosti

Definice

Číslo $a \in \mathbb{R}^\star$ se nazývá *hromadný bod* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$.

Věta

Číslo a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Věta

Každá posloupnost má nejmenší a největší hromadný bod.

Věta (**Bolzano-Weierstrass**)

Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Definice

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$. Pak největší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita superior* a označujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,$$

nejmenší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita inferior* a označujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n,$$

Věta

Posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu právě tehdy, když*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Všechny tři hodnoty jsou pak stejné.