Matematická analýza 1

Pojem funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

2023

Funkce

Definice

Nechť jsou dány neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Co je na tom špatně?

Zobrazení je základ

Definice

Kartézským součinem $A \times B$ dvou množin A a B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$ jsou libovolné prvky.
Binární relací rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. V případě, že $A = B$, používáme název *binární relace na množině* A.

Definice

Relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme *zobrazením* množiny A do množiny B, jestliže platí, že ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$ takový, že $(x, y) \in f$.
Množinu A nazýváme *definiční obor* f a značíme $D(f)$. Množinu všech prvků $y \in B$ takových, že existuje $x \in A$ s vlastností $(x, y) \in f$, nazýváme *obor hodnot* f a značíme $H(f)$.

Funkce a její graf

Definice

Buď $M \subseteq \mathbb{R}$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí reálné proměnné* nebo stručně *funkcí* jedné proměnné.
Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$, množina

$$H(f) := \{f(x)\colon x \in M\}$$

se nazývá *obor hodnot* funkce f.

Definice

Grafem funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

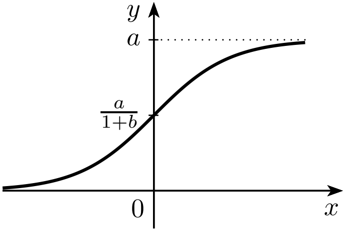
$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Typické (netypické) funkce

Logistická funkce (saturační proces)

$$y = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-cx}}$$

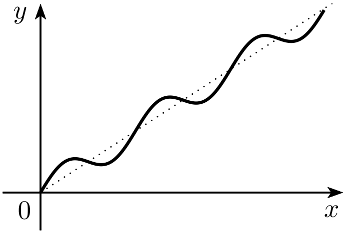
$$a,\, b,\, c > 0$$



Trendová funkce s periodickými fluktuacemi

$$y = a + bx + c \sin dx$$

$$a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$$



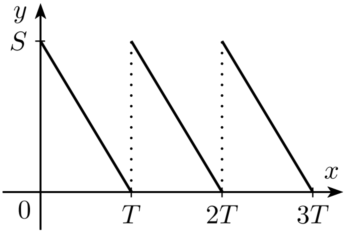
Typické (netypické) funkce

„Zásobovací“ funkce

$$y = iS - \frac{S}{T}x$$

$$(i-1)T \le x \le iT$$

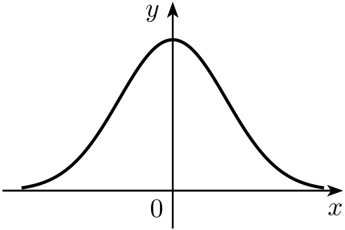
$$S, T > 0,\ i = 1, 2, \dots$$



Gaussova funkce

$$y = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

$$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$



Technikálie s nekonečnem

Definice

Množinu $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, která je uspořádaná tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$, nazýváme rozšířenou množinou reálných čísel.

Je-li $c \in \mathbb{R}$, $0 < k < +\infty$, $-\infty < z < 0$ zavádíme

1. $$c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty,$$
   $$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$
2. $$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad z \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$
   $$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \quad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$
3. $$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

Intervaly a okolí

Definice

Jsou-li

1. $a,\, b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, položíme $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$;
2. $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, položíme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$;
3. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, položíme $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$;
4. $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, položíme $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$.

Definice

Nechť x_0, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0, interval $[x_0, x_0 + \delta)$ *pravým okolím* bodu x_0 a interval $(x_0 - \delta, x_0]$ *levým okolím* bodu x_0. Množina $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ se nazývá *ryzí okolí* bodu x_0. Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(+\infty) = (a, +\infty)$ nazveme okolím bodu $+\infty$ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ nazveme okolím bodu $-\infty$.

Vlastnosti funkcí

Definice

Funkce f se nazývá *shora ohraničená*, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq U$ pro každé $x \in D(f)$. Funkce f se nazývá *zdola ohraničená*, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq L$ pro každé $x \in D(f)$. Funkce f se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in D(f)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$.
Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$.

Definice

Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme

- *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$,
- *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$,
- *nerostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- *neklesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce, která má některou z uvedených vlastností, se nazývá *monotonní*. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

Definice

Řekneme, že funkce f je *rostoucí v bodě* x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) > f(x_0)$.

Analogicky se definuje funkce *klesající v bodě*, *neklesající v bodě* a *nerostoucí v bodě*. Společný název pro tyto čtyři vlastnosti je funkce *monotonní v bodě*, resp. pro první dvě funkce *ryze monotonní v bodě*.

Věta

Funkce je rostoucí na intervalu právě tehdy, když je rostoucí v každém jeho bodě.

Definice

Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice

Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Základní perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Nové funkce ze starých

Definice

Nechť $g\colon D(g) \to \mathbb{R}$ a $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon \exists u \in \mathbb{R} \mid (x, u) \in g \wedge (u, y) \in f\right\}$$

se nazývá *složená funkce*. Píšeme $F(x) = f\,(g(x))$. Funkce g se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice

Nechť $g\colon A \to B$ a $f\colon B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(g(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce g se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Věta

Inverzní funkcí k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) funkce na množině $H(f)$.