Matematická analýza 1

Spojitost

Petr Liška

Masarykova univerzita

2023

Spojitost funkce v bodě

Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Podobně definujeme i jednostranné spojitosti – funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava*, resp. *spojitá zleva*, jestliže

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Věta

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0, jsou také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je v x_0 spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \alpha$ a funkce f je spojitá v bodě α. Pak platí, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right)$$

Věta

Je-li funkce $u = \varphi(x)$ spojitá v x_0 a $y = f(u)$ spojitá v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, je funkce $y = f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0.

Věta

Následující funkce jsou spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ *:*

1. $f(x) = c$,
2. $f(x) = x$,
3. *polynom,*
4. *racionální lomená funkce (v každém bodě, v kterém je definovaná),*
5. $\sin x$, $\cos x$,
6. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ *(všude, kde jsou definovány),*
7. a^x, $(a > 0)$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$ *jsou spojité na* $[-1, 1]$, *funkce* $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ *spojité na* $\mathbb{R}$.
Funkce $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *je spojitá na* $(0, +\infty)$.
Funkce x^s, $s \in \mathbb{R}$, *je spojitá na svém definičním oboru.*

Spojitost funkce na intervalu

Definice

Buď f funkce, $I \subseteq D(f)$ interval. Řekneme, že f je *spojitá na intervalu* I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý (pravý) koncový bod do I, je v něm spojitá zprava (zleva).
Píšeme $f \in C(I)$ a je-li $I = [a, b]$, také $f \in C[a, b]$.

Věta

Nechť f je ryze monotonní a spojitá funkce na intervalu $I \subseteq D(f)$. Pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá a ryze monotonní na intervalu $J = f(I)$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova věta)

Nechť $f \in C[a,b]$. *Pak je* f *na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své největší i nejmenší hodnoty.*

Věta (Bolzanova věta)

Nechť $f \in C[a,b]$. *Pak* f *nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledek

Nechť $f \in C[a,b]$ *a* $f(a)f(b) < 0$. *Pak existuje bod* $\xi \in (a,b)$ *takový, že* $f(\xi) = 0$.

Body nespojitosti

Nechť je f definovaná v okolí x_0 a neplatí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pak mohou nastat následující situace:

1. Existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $a \neq f(x_0)$. Bod x_0 pak nazveme *bodem odstranitelné nespojitosti* funkce f.
2. Neexistuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
   a) Existují obě limity $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a_1$ a $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a_2$, $a_1 \neq a_2$. Pak bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti prvního druhu* funkce f.
   b) Alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní. Pak bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti druhého druhu* funkce f.