

# Matematická analýza 1

Derivace funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

2023

## Definice

Bud'  $f$  funkce a bod  $x_0 \in D(f)$ . Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$*  a značíme  $f'(x_0)$ . Je-li tato limita vlastní, nazývá se číslo  $f'(x_0)$  *vlastní derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$* , je-li tato limita nevlastní, nazývá se  $f'(x_0)$  *nevlastní derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$* .

Položíme-li  $h = x - x_0$ , lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

## Věta

*Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

## Věta

*Nechť mají funkce  $f$ ,  $g$  vlastní derivaci na množině  $M$ . Pak platí:*

a)  $(cf(x))' = cf'(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

b)  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ,

c)  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ,

d) *je-li  $g(x) \neq 0$ , pak* 
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

## Věta

Nechť funkce  $u = g(x)$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0$  a nechť funkce  $y = f(u)$  má vlastní derivaci v bodě  $u_0 = g(x_0)$ . Pak složená funkce  $y = F(x) = f(g(x))$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0$  a platí:

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

## Věta

Nechť funkce  $x = f(y)$  je spojitá a ryze monotonní na intervalu  $I$ .  
Nechť  $y_0$  je vnitřní bod intervalu  $I$  a nechť má  $f$  v  $y_0$  derivaci  $f'(y_0)$ .  
Pak má inverzní funkce  $y = f^{-1}(x)$  v bodě  $x_0 = f(y_0)$  rovněž derivaci.

i) Je-li  $f'(y_0) \neq 0$ , je derivace inverzní funkce vlastní a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

ii) Je-li  $f'(y_0) = 0$ , je derivace inverzní funkce nevlastní, přičemž pro  $f$  rostoucí  $(f^{-1})'(x_0) = +\infty$  a  $(f^{-1})'(x_0) = -\infty$  pro  $f$  klesající.

## Věta

*Pro derivace elementárních funkcí platí:*

$$c' = 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1},$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

*kde  $a \in \mathbb{R}$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.*

## Definice

Druhou derivací funkce  $f$  rozumíme funkci  $f'' = (f')'$  a pro libovolné  $n \geq 2$  definujeme  $n$ -tou derivaci (derivaci  $n$ -tého řádu) funkce  $f$  vztahem

$$f^{(n)} = \left( f^{(n-1)} \right)' .$$

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě  $(x_0, f(x_0))$  tečnu se směrnicí  $f'(x_0)$ . Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro rovnici normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, platí

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{je-li } f'(x_0) \neq 0,$$
$$x = x_0, \quad \text{je-li } f'(x_0) = 0 .$$