

Matematická analýza 1

Věty o střední hodnotě a L'Hospitalovo pravidlo

Petr Liška

Masarykova univerzita

25.10.2023

Lemma

Nechť $f'(x_0) > 0$. Pak funkce f je rostoucí v bodě x_0 . Je-li $f'(x_0) < 0$, pak funkce f je klesající v bodě x_0 .

Věta (Rolleova)

Nechť funkce $f \in C[a, b]$ má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní nebo nevlastní derivaci a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta (Cauchyova)

Nechť $f, g \in C[a, b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní derivace $f'(x), g'(x)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že platí

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c).$$

Věta (Lagrange)

Nechť $f \in C[a, b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje vlastní nebo nevládní derivace $f'(x)$. Pak existuje $c \in (a, b)$, pro které platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důsledek

Nechť funkce f a g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I . Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f , g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I , je f na I konstantní.

L'Hospitalovo pravidlo

Věta

Bud' $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.