

Matematická analýza 1

Derivace a extrémny funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

1.11.2023

Věta

Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak platí:

- 1. Funkce f je neklesající na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I .*
- 2. Funkce f je rostoucí na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I , přičemž rovnost $f' = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I .*

Analogická věta platí pro nerostoucí a klesající funkce na intervalu.

Důsledek

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I .

- 1. Je-li $f' > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I .*
- 2. Je-li $f' < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I .*

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 :

lokální maximum, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

lokální minimum, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

ostré lokální maximum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

ostré lokální minimum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta (Fermatova)

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta

*Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ry-
zím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, je
 $f'(x) > 0$ a pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$, je $f'(x) < 0$, pak má f
v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Obdobné tvrzení platí pro lokální minimum.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

- a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální mini-
mum.*
- b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \ln^2 x$$

Příklad

Ve městě s 10 000 obyvateli je počet N lidí, kteří mají v daném čase t chřipku, roven

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 9999e^{-t}},$$

kde t je čas měřený ve dnech a chřipka je rozšířena jedinou osobou, která ji měla v čase $t = 0$. Určete, kdy je rychlost šíření nemoci největší.

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M . Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0 . Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in [1, e]$$

Příklad

Farma může prodat 20 beden úrody týdně při ceně 400 Kč. Majitel odhaduje, že při snížení ceny o 10 Kč prodá o dvě bedny více. Výrobní náklady jsou 200 Kč na jednu bednu. Jaká je optimální cena bedny úrody pro maximalizaci zisku a jak velký tento zisk bude?