Diferenciální počet funkcí více proměnných

Kmenová funkce, lokální extrémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

09.10.2023

Věta

Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, má graf funkce v tomto bodě tečnou rovinu o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Věta

Nechť P, Q jsou spojité funkce proměnných x, y definované na otevřené jednoduše souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, které mají na této množině spojité parciální derivace P_y, Q_x. Pak výraz $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \qquad \textit{pro každé} \qquad [x, y] \in \Omega.$$

Funkci z předchozí věty se říká *kmenová funkce* funkcí P a Q.

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$, resp. $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.
Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x,y] \neq [x_0,y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy*.

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta (Fermat)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce* f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f *v* $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, jde o minimum.*
Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*