8. cvičení (10. a 16. 11. 2023)

Kuželosečky v afinní rovině

Pojmy:

- přechod od projektivních k afinním souřadnicím a zpět;
- střed kuželosečky, průměr kuželosečky;
- asymptota kuželosečky;
- průměr kuželosečky;
- afinní typy kuželoseček, sestavení afinního polárního repéru.

Úlohy:

1. Určete střed kuželoseček:
   (a) $k_1\colon x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
   (b) $k_2\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
   (c) $k_3\colon x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$
2. Určete asymptoty kuželoseček:
   (a) $k_1\colon 3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
   (b) $k_2\colon 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y + 11 = 0$
3. Určete průměr kuželosečky $k\colon 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, který prochází bodem $M[1; -2]$.
4. Určete průměr kuželosečky $k\colon 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, který je rovnoběžný s přímkou $p\colon 2x - 5y + 4 = 0$.
5. Určete dvojici sdružených průměrů kuželosečky $k\colon 7x^2 - 8y^2 + 8xy + 26x - 16y - 17 = 0$, z nichž jeden má směrový vektor $\mathbf{u} = (1; 2)$.
6. Určete afinní typ kuželosečky, normální tvar rovnic, normovaný afinní polární repér a transformační rovnice afinních souřadnic do normovaného afinního polárního repéru.
   (a) $k_1\colon 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
   (b) $k_2\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
   (c) $k_3\colon x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$
   (d) $k_4\colon x^2 - 4xy + 5y^2 + 4y + 5 = 0$

Řešení

Kuželosečky v afinní rovině

1. (a) $S[7,5]$
   (b) nevlastní střed $\mathbf{s} = (1,1)$
   (c) přímka středů $s\colon x + y + 1 = 0$
2. (a) $a_1\colon 2x + 2y - 1 = 0$
   $a_2\colon 6x + 14y + 11 = 0$
   (b) $a_1\colon 6\mathrm{i}\sqrt{2} \cdot x + (8 - 4\mathrm{i}\sqrt{2}) \cdot y + 10 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$
   $a_2\colon -6\mathrm{i}\sqrt{2} \cdot x + (8 + 4\mathrm{i}\sqrt{2}) \cdot y + 10 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$
3. $d\colon x + 2y + 3 = 0$
4. $d\colon 2x - 5y - 3 = 0$
5. $S\left[-1; -\frac{3}{2}\right]$
   $d_1\colon 5x - 4y - 1 = 0$
   $d_2\colon 4x - 2y + 1 = 0$
6. (a) reálná elipsa
   $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$
   $S[-1,-1], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, 0\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$
   $x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \cdot x' + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y' - 1$
   $y = \sqrt{3} \cdot y' - 1$
   (b) parabola
   $x'^2 + 2y' = 0$
   $P[1,0], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right), \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$
   $x = \frac{4}{5} \cdot x' - \frac{1}{5} \cdot y' + 1$
   $y = -\frac{1}{5} \cdot x' - \frac{1}{5} \cdot y'$
   (c) dvojice reálných rovnoběžek
   $x'^2 - 1 = 0$
   $S\left[\frac{1}{2}, 0\right], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \mathbf{e}_2 = (1,-1)$
   $x = \frac{1}{2} \cdot x' + y' + \frac{1}{2}$
   $y = -y'$
   (d) imaginární elipsa
   $x'^2 + y'^2 + 1 = 0$
   $S[-4,-2], \mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (2,1)$
   $x = x' + 2 \cdot y' - 4$
   $y = y' - 2$