

11. cvičení (7. a 8. 12. 2023)

Afinní klasifikace kvadrik

Pojmy:

- afinní typy kvadrik, sestavení afinního polárního repéru.

Úlohy:

1. Určete afinní typ kvadriky, normální tvar rovnic, normovaný afinní polární repér a transformační rovnice afinních souřadnic do normovaného afinního polárního repéru.

(a) $K_1: x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0$

(b) $K_2: 9x^2 - 4y^2 - 91z^2 + 18xz - 40yz - 36 = 0$

(c) $K_3: x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$

(d) $K_4: x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy + 6xz - 30yz - 2x - 2y = 0$

Řešení

Afinní klasifikace kvadrik

1. (a) jednodílný (přímkový) hyperboloid

$$x''^2 + y''^2 - z''^2 - 1 = 0$$

$$S\left[\frac{14}{3}, 3, \frac{1}{3}\right], \quad \mathbf{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{11}{3}}, 0, 0\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(4\sqrt{\frac{11}{18}}, 3\sqrt{\frac{11}{18}}, 2\sqrt{\frac{11}{18}}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, \sqrt{\frac{11}{6}}, 0\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{11}{3}} & 4\sqrt{\frac{11}{18}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{\frac{11}{18}} & \sqrt{\frac{11}{6}} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{11}{18}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- (b) hyperbolická válcová plocha

$$x''^2 - y''^2 - 1 = 0$$

$$S[0, 0, 0], \quad \mathbf{v}_1 = (2, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 3, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, -5, 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

- (c) eliptický paraboloid

$$x''^2 + y''^2 + 2z'' = 0$$

$$Q\left[0, 0, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right], \quad \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, 0\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- (d) parabolická válcová plocha

$$x''^2 + 2z'' = 0$$

$$Q[0, 0, 0], \quad \mathbf{v}_1 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, -2), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$