# Kuželosečky

1. Z bodu $P$ jsou vedeny tečny ke kuželosečce $k$. Najděte rovnici přímky procházející body dotyku tečen.

   a) $k\colon 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0 \qquad P = [1, -1]$
   b) $k\colon 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0 \qquad P = [1, -2]$
   c) $k\colon 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0 \qquad P = [3, 1]$

2. V bodech průniku kuželosečky $k$ s přímkou $p$ jsou sestrojeny tečny ke kuželosečce $k$. Určete průsečík těchto tečen.

   a) $k\colon x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0 \qquad p\colon x + 3y + 1 = 0$
   b) $k\colon 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0 \qquad p\colon x - 3 = 0$
   c) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0 \qquad p\colon 3x - y + 6 = 0$

3. Na přímce $d$ určete bod $G$ polárně sdružený s bodem $H$ vzhledem ke $k$.

   a) $k\colon 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0 \qquad d\colon 4x + 3y - 12 = 0 \qquad H = [0, 0]$
   b) $k\colon x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0 \qquad d\colon 4x - y + 30 = 0 \qquad H = [5, 1]$

4. Bodem $M$ veďte tečny ke kuželosečce $k$.

   a) $k\colon 2x^2 - xy - y^2 - 15x - 3y + 18 = 0 \qquad M = [-2, 1]$
   b) $k\colon x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \qquad M = [4, -2]$

5. Ke kuželosečce $k$ sestrojte tečny rovnoběžné s přímkou $p$.

   a) $k\colon 3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 4y - 3 = 0 \qquad p\colon 4x + y + 8 = 0$
   b) $k\colon x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \qquad p\colon 2x + 2y - 1 = 0$

6. Určete rovnici kuželosečky $k$ procházející zadanými body.

   a) $[1, 1]$, $[5, 3]$, $[-3, -1]$, $[2, -3]$, $[1, -1]$
   b) $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[1, -1]$, $[-1, 1]$ a nevlastním bodem určeným směrem $(1, 1)$

7. Určete rovnici kuželosečky $k$, která prochází body: $[5, 3], [2, -3], [1, -1]$ a dotýká se přímky $t\colon x - 2y + 1 = 0$ v bodě $T = [1, 1]$.

8. Určete společný průměr kuželoseček $k_1$ a $k_2$:

   $$k_1\colon x^2 - xy - y^2 - x - y = 0 \qquad k_2\colon x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$$

9. Určete průnik kuželoseček $k_1$ a $k_2$:

   $$k_1\colon 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0 \qquad k_2\colon 5x^2 + 16xy + 5y^2 - 5x - 5y = 0$$
   $$k_1\colon 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 = 0 \qquad k_2\colon 2x^2 + xy - 6y^2 - 5x + 11y - 3 = 0$$

10. Určete sdružené průměry kuželosečky $k\colon 2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$ tak, aby jeden z nich procházel bodem $M = [7, 11]$.

11. Nalezněte všechny středy kuželosečky $k$.

a) $k\colon 29x^2 + 24xy + 36y^2 + 34x - 48y - 139 = 0$

b) $k\colon 25x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y - 15 = 0$

c) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

12. Určete asymptoty kuželosečky $k$.

a) $k\colon x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$

b) $k\colon 5x^2 + 26xy + 5y^2 - 16x + 16y - 88 = 0$

13. Určete osy kuželosečky $k$.

a) $k\colon 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

b) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$

14. Najděte vrcholy kuželosečky $k$.

a) $k\colon x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$

b) $k\colon 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 74x + 132y + 334 = 0$

15. Pomocí transformace projektivních homogenních souřadnic určete normální rovnice a projektivní typ kuželosečky $k$. Určete transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

a) $k\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = 0$

b) $k\colon 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$

16. Pro zadané kuželosečky určete normální tvar rovnic, afinní typ, normovaný polární afinní repér a transformace afinních nehomogenních souřadnic, které převádějí danou rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

a) $k\colon x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

b) $k\colon 4x^2 + 10xy + 5y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

c) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

d) $k\colon x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$

17. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete kanonickou rovnici a typ kuželosečky $k$. Určete také příslušné transformační rovnice.

a) $k\colon 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

b) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$

c) $k\colon 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$

d) $k\colon 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

e) $k\colon 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

f) $k\colon 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

g) $k\colon 7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$

h) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$

18. a) Geometrické místo bodů, které mají stejnou vzdálenost od roviny a bodu, který v této rovině neleží, je kvadrika. Jaká?
    b) Která kvadrika hodnosti 3 je nestředová?
    c) Co je průnikem dvojdílného hyperboloidu a jeho asymptotické roviny?
    d) Průnik reálného elipsoidu a jeho tečné roviny je kuželosečka. Jaká?
    e) Kolik vrcholů má hyperbolický paraboloid?

# Kvadriky

1. Určete průnik kvadriky $K$ s rovinou $\varrho$.

$$\text{a) } K\colon 3x^2+4y^2-5z^2+2xy-3yz+5x-8=0 \qquad \varrho\colon z=0$$
$$\text{b) } K\colon x^2+y^2-2xy+5yz+xz-x+3y-z=0 \qquad \varrho\colon y=0$$

2. Určete tečné roviny kvadriky $K$ rovnoběžné s rovinou $\varrho$.

$$K\colon 4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0 \qquad \varrho\colon x+2y+7=0$$

3. Pro kvadriku $K$ určete tečné roviny obsahující osu $y$.

$$\text{a) } K\colon 5x^2-8y^2+5z^2+6xz+4x-2z=0$$
$$\text{b) } K\colon 5x^2-4y^2+z^2+2x-6y-3z=0$$

4. Určete průměrovou rovinu $\sigma$ kvadriky $K$ rovnoběžnou s rovinou $\varrho$.

$$K\colon 2x^2-3y^2-z^2+4xy+6xz-8yz+2x-8y-11z-2=0 \qquad \varrho\colon 2x-y+3z+7=0$$

5. Najděte všechny středy kvadriky $K$.

$$\text{a) } K\colon 4x^2+2y^2+12z^2-4xy+8yz+12xz+14x-10y+7=0$$
$$\text{b) } K\colon 5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6xz+12x-36z=0$$
$$\text{c) } K\colon 4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12xz+8x-4y+12z-5=0$$

6. Určete hodnost kvadriky $K$, je-li singulární určete množinu jejích singulárních bodů.

$$\text{a) } K\colon 2x^2-3z^2+4xy+2yz-5xz-8x-12y+17z+6=0$$
$$\text{b) } K\colon x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0$$

7. Určete normální rovnici a projektivní typ kvadriky $K$. Určete normovanou polární geometrickou bázi a transformaci projektivních homogenních souřadnic, která převádí rovnici kvadriky do normálního tvaru.

$$\text{a) } K\colon 3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+22x_1x_4-5x_2^2+6x_2x_3-42x_2x_4-x_3^2+10x_3x_4-16x_4^2=0$$
$$\text{b) } K\colon 3x_1^2+8x_1x_2+8x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2+16x_3x_4+11x_4^2=0$$

8. Určete rovnici asymptotického kužele zadaného hyperboloidu.

$$\text{a) } K\colon x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+6xz+2x-6y-2z=0$$
$$\text{b) } K\colon 2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0$$

9. Určete afinní typ a normální rovnici kvadriky $K$. Určete normovaný polární afinní repér transformaci afinních souřadnic, která převádí rovnici kvadriky do normálního tvaru.

$$\text{a) } K\colon x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$$
$$\text{b) } K\colon x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4xz - 8x + 10y = 0$$
$$\text{c) } K\colon x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy - 30yz + 6xz - 2x - 2y = 0$$

10. Určete hlavní směry, hlavní roviny, osy a vrcholy kvadriky $K$.

$$\text{a) } K\colon x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2xz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$$
$$\text{b) } K\colon x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6yz - 6xz + 2x + 2y + 4z = 0$$

11. Metodou invariantů určete kanonickou rovnici a typ kvadriky $K$.

$$\text{a) } K\colon 2x^2 - y^2 + z^2 + 4x + 8y - 4z - 6 = 0$$
$$\text{b) } K\colon 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$$
$$\text{c) } K\colon x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2xz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$$
$$\text{d) } K\colon 5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz - 8xz - 27 = 0$$

# Výsledky

Kuželosečky

1. a) $p\colon 14x - 12y + 9 = 0$
   b) $p\colon x - 6y + 1 = 0$
   c) $p\colon 5x + y + 2 = 0$

2. a) $P = [1, -1]$
   b) $P = [3, 3]$
   c) $P = [-3, 1]$

3. a) $G = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
   b) $G$ je libovolný bod přímky $4x - y + 30 = 0$.

4. a) $t\colon 4x + 5y + 3 = 0$
   b) $t_1\colon x + y - 2 = 0$ a $t_2\colon 7x + 10y - 8 = 0$

5. a) $t_1\colon 4x + y - 1 = 0$ a $t_2\colon 8x + 2y + 19 = 0$
   b) $t_1\colon x + y - 2 = 0$ a $t_2\colon 5x + 5y - 6 = 0$

6. a) $k\colon 2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$
   b) $k\colon x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 3y - 4 = 0$

7. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$

8. $p\colon 5x + 5y + 2 = 0$

9. a) kuželosečky se protínají v bodech $[0, 1]$, $[1, 0]$ a dotýkají v bodě $[0, 0]$
   b) kuželosečky se protínají v přímce $p\colon 2x - 3y + 1 = 0$

10. $p\colon x - y + 4 = 0$ a $q\colon x - 2y + 7 = 0$

11. a) jedinný vlastní střed $S = [-1, 1]$
    b) přímka středů $s\colon 5x - y + 1 = 0$
    c) jedinný nevlastní střed určený směrem $(1, 1)$

12. a) $u\colon x - 2y + 4 = 0$ a $v\colon x - 3y - 6 = 0$
    b) $u\colon 5x + y + 4 = 0$ a $v\colon x + 5y - 4 = 0$

13. a) $o_1\colon x + 3y - 5 = 0$ a $o_2\colon 3x - y + 5 = 0$
    b) $o\colon 4x - 4y + 3 = 0$

14. a) $V_1\,[1, 1]$, $V_2 = [-1, -1]$, $V_3 = \left[-\frac{i\sqrt{5}}{5}, \frac{i\sqrt{5}}{5}\right]$, $V_4 = \left[\frac{i\sqrt{5}}{5}, -\frac{i\sqrt{5}}{5}\right]$
    b) $V = [1, -2]$

15. a) $y_1^2 + y_2^2 = 0$; dvojice komplexně sdružených přímek; $x_1 = y_1 - y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$
    b) $y_1^2 = 0$; dvojnásobná přímka; $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3$, $x_3 = y_3$

16. a) $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$; reálná elipsa; $P = [7, 5]$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{26}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{26}, \sqrt{26})$;
    $x = \sqrt{26}x' + \sqrt{26}y' + 7$, $y = \sqrt{26}y' + 5$
    b) $x'^2 - y'^2 + 1 = 0$; hyperbola; $P = [1, -\frac{3}{5}]$, $\mathbf{e}_1 = (0, \frac{4}{5})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$;
    $x = \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 1$, $y = \frac{4}{5}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - \frac{3}{5}$
    c) $x'^2 - 2y' = 0$; parabola; $P = [-\frac{1}{10}, \frac{19}{10}]$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$;
    $x = x' + \frac{1}{5}y' + \frac{19}{10}$, $y = \frac{1}{5}y' - \frac{1}{10}$
    d) $x'^2 - 1 = 0$; reálné rovnoběžky; $P = [-1, 0]$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{5}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-1, 1)$;
    $x = \sqrt{5}x' - y' - 1$, $y = y'$

17. a) $\frac{6x'^2}{35} + \frac{36y'^2}{35} - 1 = 0$; reálná elipsa; $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{7}{6}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}$
    b) $x'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}y' = 0$; parabola $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{41}{48}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{53}{48}$
    c) $x'^2 + 1 = 0$; komplexní rovnoběžky; $x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 5$, $y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$
    d) $3x'^2 + 2y'^2 = 0$; imaginární různoběžky $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 2$
    e) $x'^2 + 2y'^2 + 1 = 0$; imaginární elipsa; $x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' - 1$, $y = -\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'$
    f) $4x'^2 - y'^2 = 0$; různoběžky; $x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' - 2$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'$
    g) $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} + 1 = 0$; hyperbola; $x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + 1$, $y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 1$
    h) $x'^2 - 25 = 0$; reálné rovnoběžky; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 6$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$

18. a) rotační paraboloid
    b) válcová plocha
    c) singulární kuželosečka (přesněji komplexně sdružené přímky)
    d) komplexně sdružené přímky
    e) jeden

## Kvadriky

1. a) elipsa $3x^2 + 4y^2 + 2xy + 5x - 8 = 0$
   b) dvě různoběžky $p\colon x + z = 0$, $y = 0$; $q\colon x - 1 = 0$, $y = 0$

2. $\tau_1\colon x + 2y - 2 = 0$, $\tau_2\colon x + 2y = 0$

3. a) $\tau\colon 2x - z = 0$
   b) $\tau_1\colon x = 0$, $\tau_2\colon 41x + 12z = 0$

4. $\sigma\colon 2x - y + 3z - 2 = 0$

5. a) jedinný vlastní střed $S = \left[-1, \frac{3}{2}, 0\right]$
   b) přímka středů $s\colon 2x - 3y = 0,\ y - 2z + 4 = 0$
   c) rovina středů $\varrho\colon 2x - y + 3z + 2 = 0$

6. a) hodnost 2, přímka singulárních bodů $[1 + 2t, 6 - 7t, 4 - 4t]$
   b) hodnost 3, jedinný singulární bod $[2, 1, 0]$

7. a) $y_1^2 - y_2^2 = 0$; dvojice reálných rovin;
   b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$; reálná kuželová plocha;

8. a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z + 1 = 0$
   b) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz - 2x - 4y + 1 = 0$

9. a) eliptický paraboloid; $x'^2 + y'^2 + 2z' = 0$;
   např. $P = [3, \frac{3}{2}, 0]$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}_3 = (-\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, 0)$;
   $x = x' - \frac{2}{15}z' + 3$, $y = \frac{1}{15}z' + \frac{3}{2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{5}}y'$
   b) jednodílný hyperboloid; $x'^2 - y'^2 - z'^2 + 1 = 0$;
   např. $S = [\frac{14}{3}, 3, \frac{1}{3}]$, $\mathbf{e}_1 = (\frac{\sqrt{11}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{11}}{3})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}})$;
   $x = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}x' + \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + \frac{14}{3}$, $y = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + 3$, $z = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}x' + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}z' + \frac{1}{3}$
   c) parabolická válcová plocha; $x'^2 + 2z' = 0$;
   např. $P = [0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (5, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 0, \frac{1}{3})$;
   $x = \frac{1}{6}x' + 5y' - z'$, $y = -\frac{1}{6}x' + y'$, $z = \frac{1}{3}z'$

10. a) hlavní směry: $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -2)$
    hlavní roviny: $x + y = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x - y - 2z = 0$
    osy: $[1 + t, -1 + t, 1]$, $[1 + t, -1 - t, 1 + t]$, $[1 + t, -1 - t, 1 - 2t]$
    vrcholy: $[1, -1, 1]$
    b) hlavní směry: $(1, -1, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 2)$
    hlavní roviny: $x - y = 0$, $x + y - z = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$
    osy: $\left[\frac{1}{6} + t, \frac{1}{6} - t, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{6} + t, \frac{1}{6} + t, \frac{1}{3} - t\right]$, $\left[\frac{1}{6} + t, \frac{1}{6} + t, \frac{1}{3} + 2t\right]$
    vrcholy: $[0, 0, 0]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1-2i}{6}, \frac{1-2i}{6}, \frac{1+i}{3}\right]$, $\left[\frac{1+2i}{6}, \frac{1+2i}{6}, \frac{1-i}{3}\right]$, $\left[\frac{1-3i}{6}, \frac{1+3i}{6}, \frac{1}{3}\right]$,
    $\left[\frac{1+3i}{6}, \frac{1-3i}{6}, \frac{1}{3}\right]$

11. a) dvojdílný hyperboloid $2x'^2 + y'^2 - z'^2 + 4 = 0$
    b) reálný elipsoid $8x'^2 + 5y'^2 + 2z'^2 - 32 = 0$
    c) reálná kuželová plocha $3x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 = 0$
    d) reálná rotační válcová plocha $x'^2 + y'^2 - 3 = 0$