Cvičení M6520, 8. ledna 2021

MĚMÍ I.

5.10(i) Řešte v $\mathbb{Z}$: $5^x+3^y=8z-2$ $\quad x,y\geq 0$, $z>0$ (snadno se vidí, že pro $x<0$ nebo $y<0$ nemá řešení, $0<5^x+3^y<1$ pro $x,y<0$)

Lineární vzhledem k z $\Rightarrow$ modulo 8

$$5^x+3^y\equiv -2 \pmod 8$$

x	0	1	2	3
5^x (8)	1	5	1	5 ...

y	0	1	2
3^y	1	3	1 ...

$x\equiv 1 (2)$ $\qquad$ $y\equiv 0 (2)$

$x=2k-1, k\in\mathbb{N}$ $\qquad$ $y=2l, l\in\mathbb{N}$

$$z=\frac{1}{8}(5^x+3^y+2)=\frac{1}{8}(5^{2k-1}+3^{2l}+2),\quad k,l\in\mathbb{N}$$

např. [1,2,2].

5.13(i) Řešte v $\mathbb{N}$: $6(x-y)=x\cdot y$

Řeš: $6\mid L\Rightarrow 6\mid P \Rightarrow 3\mid xy \Rightarrow 3\mid x \vee 3\mid y$

$2\mid xy \Rightarrow 2\mid x\vee 2\mid y$

jinak: $6x-6y-xy=0$

$x(6-y)-6y=0$

$x(6-y)+6(6-y)-36=0$ ✓ $\quad \boxed{\begin{array}{l} x(6-y)-y(6-y)-y^2=0 \\ (x-y)(6-y)=y^2 \end{array}}$

$\underbrace{(x+6)}_{\geq 7}(6-y)=36$

známe možné rozklady $\qquad$ a první neznáme rozklad

$=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6=9\cdot 4=12\cdot 3=18\cdot 2=36\cdot 1$

$x+6=9$	$x+6=12$	$x+6=18$	$x+6=36$
$6-y=4$	$6-y=3$	$6-y=2$	$6-y=1$
[3,2]	[6,3]	[12,4]	[30,5]

5.12(iv) Řešte v $\mathbb{N}$: $x+y+z=x\cdot y\cdot z$

Řeš: symetrické v x,y,z $\Rightarrow$ lze BUNO (wlog) předpokládat $x\leq y\leq z$

$$3x\leq \underset{\overset{\|}{xyz}}{x+y+z}\leq 3z$$

$$3\cancel{x} \le \cancel{x}y\cancel{z} \le 3\cancel{z}$$

$3 \le y \cdot z \qquad xy \le 3 \Rightarrow x \le y \le 3$

1. $y=3 \Rightarrow x=1 \qquad 4+z=3z \Rightarrow z=2$ (nesplní $z \ge y$)
2. $y=2 \Rightarrow x=1 \qquad 3+z=2z \Rightarrow z=3 \qquad [1,2,3]$
3. $y=1 \Rightarrow x=1 \qquad 2+z=z \quad \times$

Celkem máme 6 řešení: $[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]$.

5.14(i) Řešte v $\mathbb{Z}$: $x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2$

Řeš: $y^2 = \underbrace{(x^2+8x)}_{z}\underbrace{(x^2+8x}_{z}+7)$

$$y^2 = z^2+7z$$

$$(z^2+6z+9)=(z+3)^2 < \overset{?}{} < (z^2+8z+16)=(z+4)^2$$

$$z^2+6z+9 < z^2+7z < z^2+8z+16$$

$$9 < z \;\&\; 0 < z+16$$

$$\Rightarrow$$

Kdyby $z>9 \Rightarrow (z+3)^2 < \underbrace{z^2+7z}_{=y^2} < (z+4)^2 \Rightarrow$ SPOR

Je tedy $z \le 9$, tj: $x^2+8x \le 9$

$(x+4)^2 \le 25$

$|x+4| \le 5$, tj: $-5 \le x+4 \le 5$

$-9 \le x \le 1$

Dosadíme a dostaneme: $[x,y] \in \{[-9,\pm 12],[-8;0],[-7,0],[-4,\pm 12],$
$[-1,0],[0,0],[1,\pm 12]\}$.

$x=-6 \Rightarrow (-6)(-5)\cdot 1 \cdot 2 = 30 = y^2$

5.16(iii) Řešte v $\mathbb{N}$: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$

Řeš: (pozor, není úplně symetrická, pouze cyklická symetrie)

POMŮŽE NÁM AG-nerovnost: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \text{ rovnost pro } x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

(tedy $x_1 + \dots + x_n \ge n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$

$x_1 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n$)

V našem případě $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3 \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3$,

nastává tedy rovnost, tj. $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$, tj.

$x = y = z$

Množinou řešení jsou všechny trojice $[k, k, k]$, pro $k \in \mathbb{N}$.

5.16 (iv) spec. případ velké Fermatovy věty $x^n + y^n = z^n$ nemá řešení v $\mathbb{N}$ pro $n > 2$

Dokažte, že pro $n > 2$ nemá rovnice

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n \text{ řešení v } \mathbb{N}.$$

Řeš.: připusťme, že x, n jsou řešením, položme $y = x + 1 \ge 2$

$$(y-1)^n + y^n = (y+1)^n$$

parita? y je sudé (kdyby $2 \nmid y \Rightarrow S + L \ne S$)

mod y? $(-1)^n \equiv 1^n \pmod{y}$

n sudé: O.K.

n liché: $-1 \equiv 1 \ (y) \iff y \mid 2 \Rightarrow y = 2$

$1^n + 2^n = 3^n$, platí pouze pro $n = 1$ ✗

mod y^2? $(y+1)^n = y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} y + 1 \equiv ny + 1$

$(y-1)^n + y^n = y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} + \dots - \binom{n}{n-1} y + 1 \equiv -ny + 1$

$-ny + 1 \equiv ny + 1 \ (y^2)$

$\iff y^2 \mid 2ny \iff y \mid 2n$, tj. $y \le 2n$

Úprava výchozí rovnice:

$$(y-1)^n + y^n = (y+1)^n \quad | : y^n$$

$$2 > \left(1 - \frac{1}{y}\right)^n + 1 = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^n \ge 1 + n \cdot \frac{1}{y}$$

(odtud $1 > \frac{n}{y}$, $y > n$)

Bernoulliho nerovnost

mod y^3 $\binom{n}{2} y^2 - ny + 1 \equiv \binom{n}{2} y^2 + ny + 1$

$-ny \equiv ny \pmod{y^3}$

$\iff y^3 \mid 2ny \iff y^2 \mid 2n$, tj. $2n \ge y^2$

Tj. $1 > \frac{n}{y} = \frac{2n}{2y} \ge \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2} \iff 2 > y$ ↯