Př. Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je podtěleso tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$. Určete stupeň rozšíření těles $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]$.

Řeš. Každé komplexní číslo lze jednoznačně zapsat ve tvaru $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Proto dvojice $1, i$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Proto $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$.

Podokruh okruhu

Je dán okruh $(R,+,\cdot)$ a podmnožina $H\subseteq R$. Podokruh okruhu R generovaný množinou H je průnik všech podokruhů okruhu R, které mají H jako svou podmnožinu.

Speciálně: je-li R komutativní a $H = S\cup\{a\}$, kde S je podokruh okruhu R, pak podokruh okruhu R generovaný H je roven

$$H[a] = \{ f(a) \ ; \ f(x)\in S[x]\}$$

Př. Označme $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Spočítejte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]$.

Řeš: stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = \text{st} f(x)$, kde $f(x)$ je minimální polynom α nad $\mathbb{Q}$.

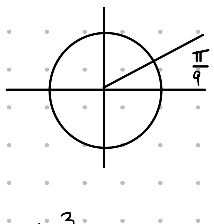
$$\alpha^2 = 2+\sqrt{2}$$
$$\alpha^2 - 2 = \sqrt{2}$$
$$(\alpha^2-2)^2 = 2$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$$

Tedy α je kořen polynomu $x^4-4x^2+2\in\mathbb{Q}[x]$.
Podle Eisensteinova kritéria pro prvočíslo 2 je polynom x^4-4x^2+2 ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.
Je to tedy hledaný minimální polynom $f(x)$. Proto $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = 4$.

$A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$, $A \neq B$

je-li $x_1 = x_2$, rovnice přímky AB je $x = x_1$ $\quad (1\cdot x + 0\cdot y = x_1)$
je-li $x_1 \neq x_2$, rovnice přímky AB je $y = kx + q$ $\quad (-k\cdot x + 1\cdot y = q)$

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad y_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_2 + q \implies$$



$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underline{\cos 3\alpha} + i\sin 3\alpha \qquad \text{Moivreova věta}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underline{\cos^3\alpha} + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha \underline{- 3\cos\alpha\sin^2\alpha} - i\sin^3\alpha \qquad \text{Binomická věta}$$

Př. Vysvětlete, proč pomocí pravítka a kružítka nelze „zdvojit krychli". Jde o to, že dané úsečce sestrojit úsečku, jejíž délka je $\sqrt[3]{3}$ krát větší než délka zadané.