

Sinová a kosinová věta

1. V daném trojúhelníku ABC při obvyklém označení stran a vnitřních úhlů platí $a : b = 2 : 3$ a $\alpha : \beta = 1 : 2$. Zjistěte, zda rovněž poměr $a : c$ je poměrem dvou celých čísel (v kladném případě tato čísla najděte).
2. Užitím sinové věty dokažte tzv. *tangentovou větu* pro obecný trojúhelník ABC , která je při obvyklém označení jeho prvků vyjádřena úměrou $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) : \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$.
3. Do kružnice o poloměru $R = 3\sqrt{6}$ cm je vepsán trojúhelník ABC , ve kterém platí $a = 2\sqrt{30}$ cm, $v_b = 2\sqrt{5}$ cm a $\alpha > 90^\circ$. Vypočtěte délky zbylých stran b a c .
4. V trojúhelníku ABC o obsahu 12 cm^2 při obvyklém označení stran a úhlů platí $a = 5$ cm a $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$. Ukažte, že rovněž délky b, c zbylých dvou stran trojúhelníku jsou (v cm) vyjádřeny racionálními čísly a tato čísla určete.
5. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho strany AB v bodě T , přičemž úsečky AT a BT mají po řadě délky 5 a 9. Vypočtěte délky všech stran trojúhelníku ABC , víte-li navíc, že jeho vnitřní úhel při vrcholu C má velikost 120° . (Návod: Uvažujte o dalších dvou bodech dotyku vepsané kružnice.)
6. V trojúhelníku ABC platí $a = 3$ cm, $b = 2\sqrt{5}$ cm a $\sin \gamma = 2/3$. Vypočtěte c , $\sin \alpha$ a $\cos \beta$ (přesně, tj. bez užití přibližných hodnot goniometrických a cyklometrických funkcí z kalkulaček).
7. Odvoďte vzorce pro délky těžnic trojúhelníku ABC pomocí délek a, b, c jeho stran. (Návod: Pro určení délky těžnice CS uplatněte nejprve kosinovou větu v trojúhelnících ASC a ABC se společným úhlem u vrcholu A . Pak tento úhel z obou rovností eliminujte.)