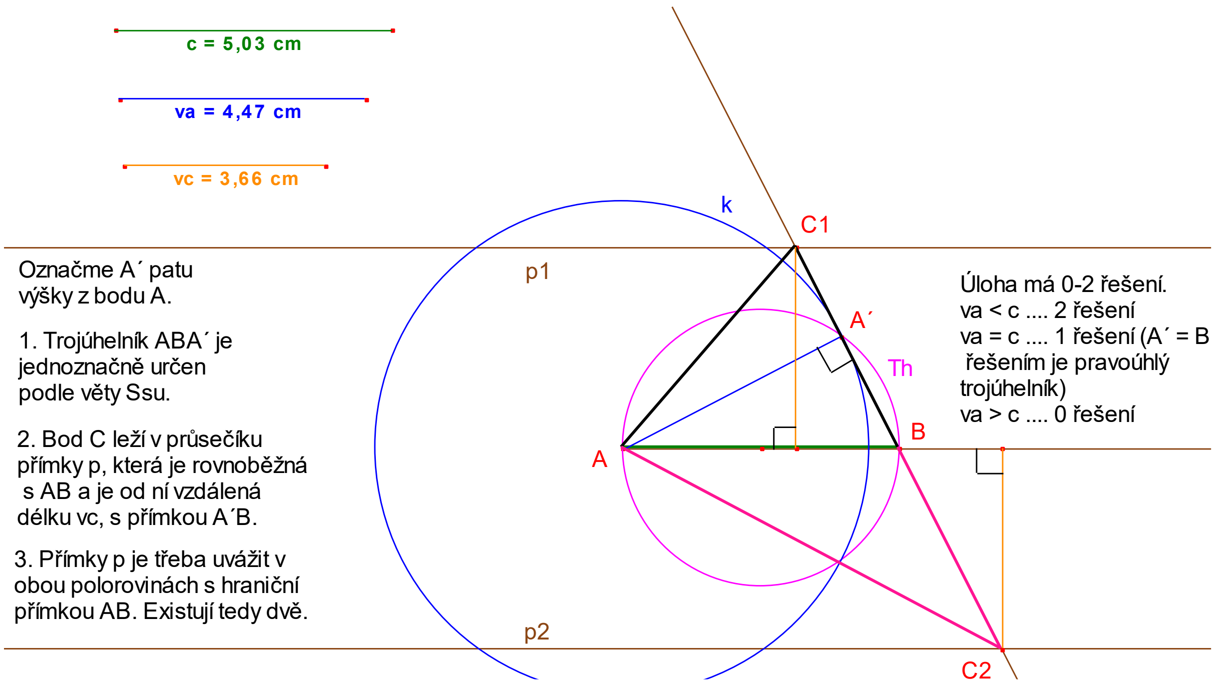
A) Nepolohové úlohy

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li při obvyklém značení dáno

1. c, v_a, v_c



Označme A´ patu výšky z bodu A.

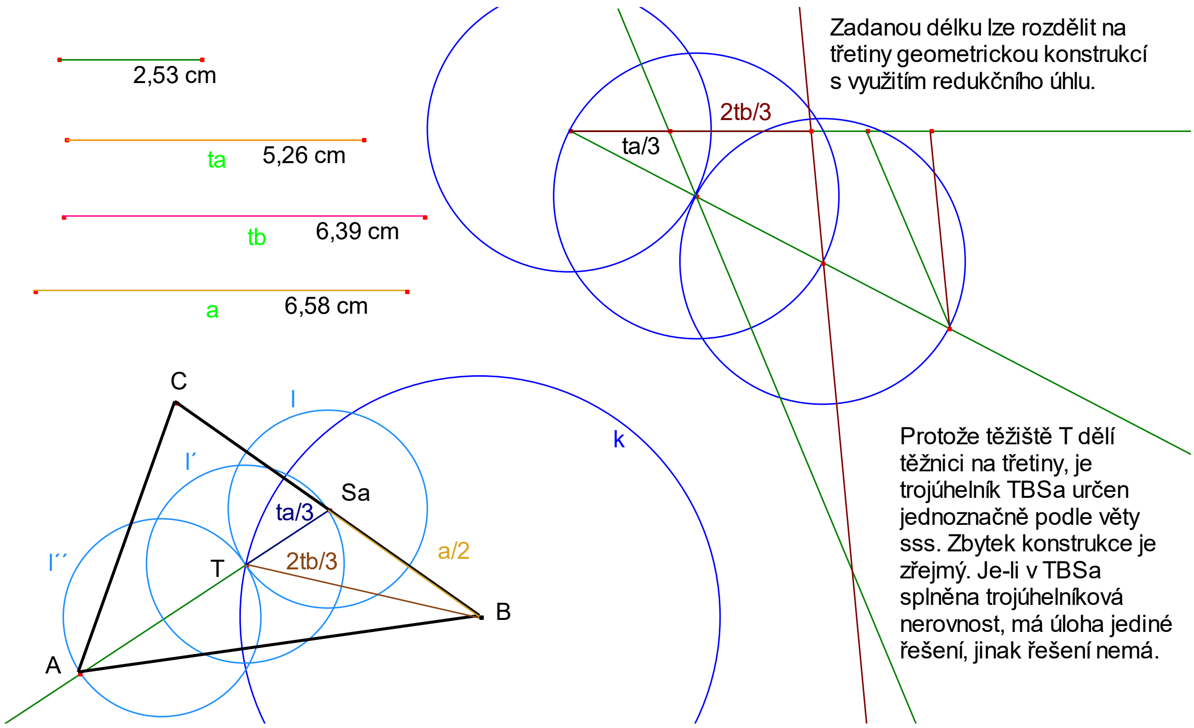
1. Trojúhelník ABA´ je jednoznačně určen podle věty Ssu.

2. Bod C leží v průsečíku přímky p, která je rovnoběžná s AB a je od ní vzdálená délku vc, s přímkou A´B.

3. Přímky p je třeba uvážit v obou polorovinách s hraniční přímkou AB. Existují tedy dvě.

Úloha má 0-2 řešení.
va < c .... 2 řešení
va = c .... 1 řešení (A´ = B řešením je pravoúhlý trojúhelník)
va > c .... 0 řešení

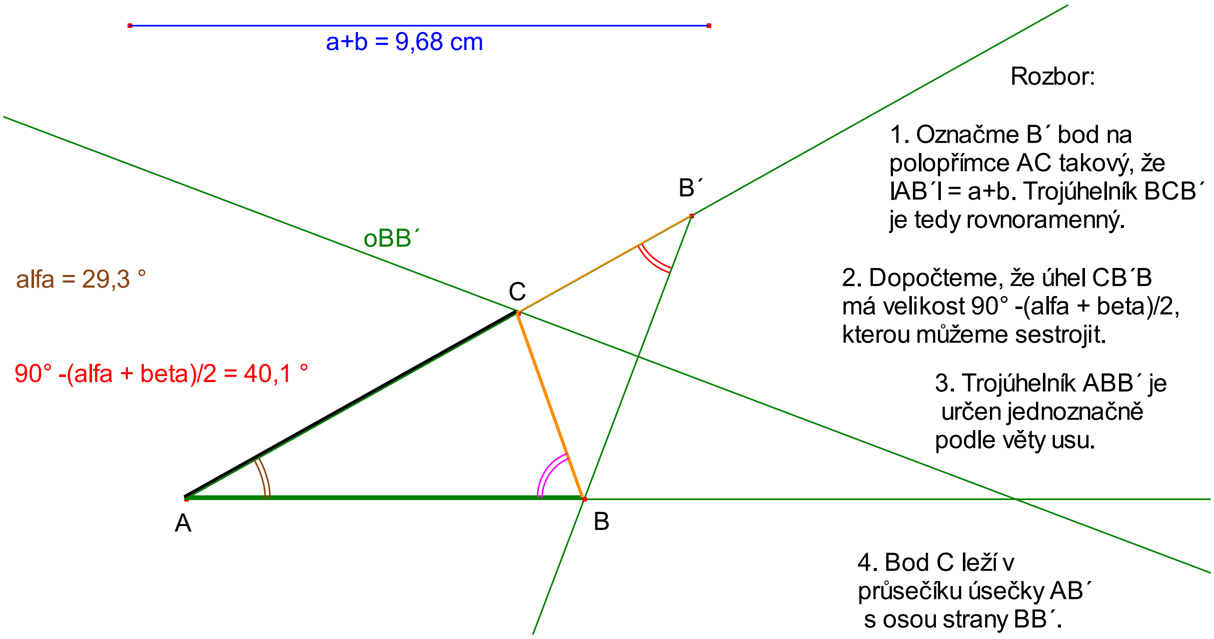
2. a, t_a, t_b



Zadanou délku lze rozdělit na třetiny geometrickou konstrukcí s využitím redukčního úhlu.

Protože těžiště T dělí těžnici na třetiny, je trojúhelník TBSa určen jednoznačně podle věty sss. Zbytek konstrukce je zřejmý. Je-li v TBSa splněna trojúhelníková nerovnost, má úloha jediné řešení, jinak řešení nemá.

3. a+b, α, β



Rozbor:

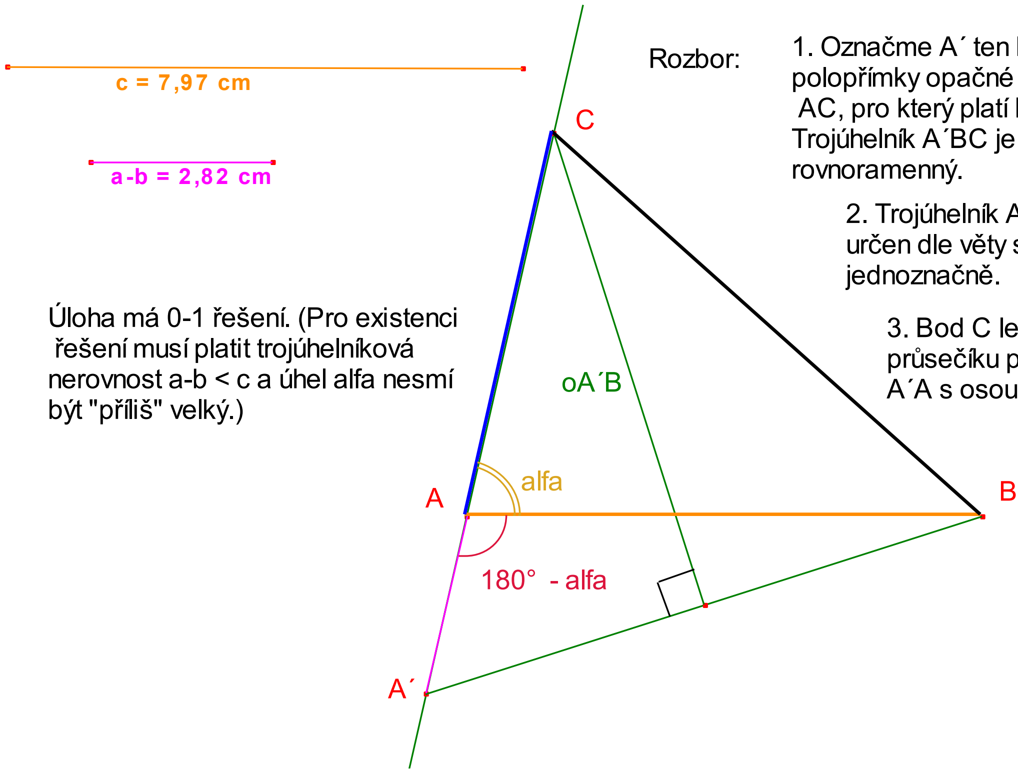
1. Označme B´ bod na polopřímce AC takový, že |AB´| = a+b. Trojúhelník BCB´ je tedy rovnoramenný.

2. Dopočteme, že úhel CB´B má velikost 90° -(alfa + beta)/2, kterou můžeme sestrojit.

3. Trojúhelník ABB´ je určen jednoznačně podle věty usu.

4. Bod C leží v průsečíku úsečky AB´ s osou strany BB´.

4. a-b (a-b>0), c, α



Rozbor:

1. Označme A´ ten bod polopřímky opačné k polopřímce AC, pro který platí |AA´| = a-b. Trojúhelník A´BC je tedy rovnoramenný.

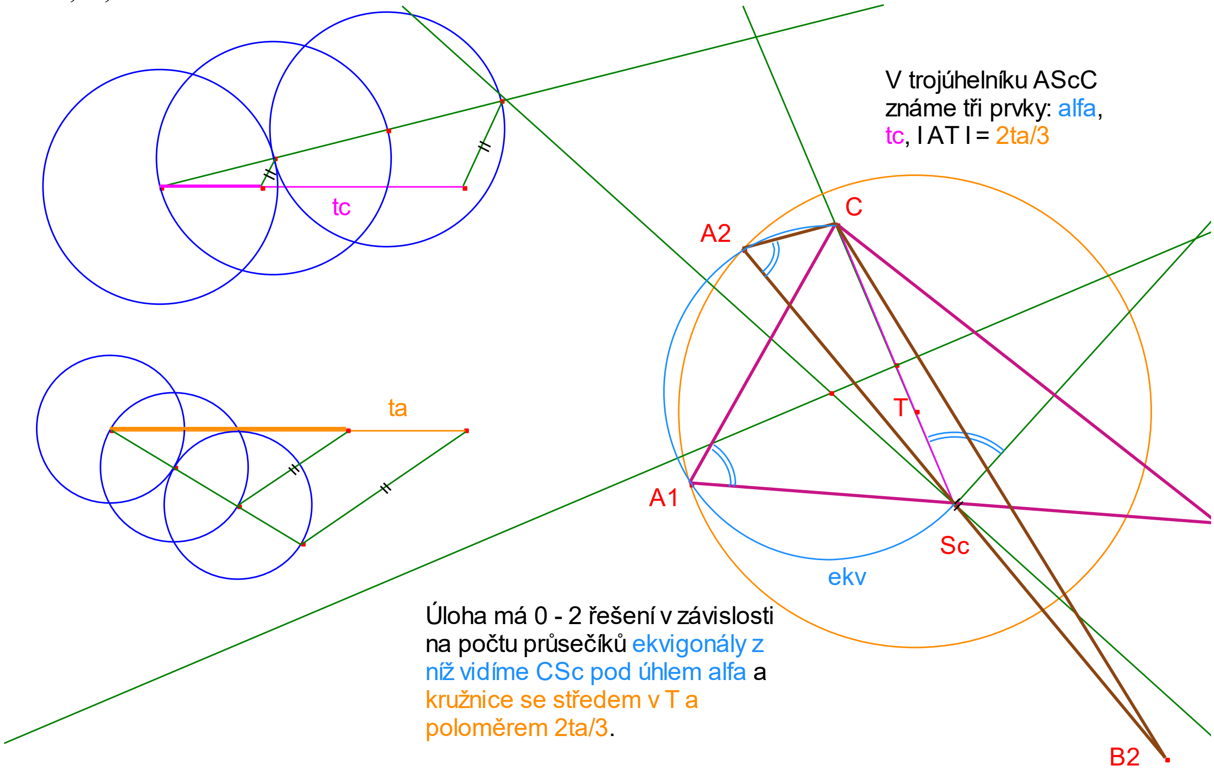
2. Trojúhelník A´AB je určen dle věty sus jednoznačně.

3. Bod C leží v průsečíku polopřímky A´A s osou úsečky A´B.

Úloha má 0-1 řešení. (Pro existenci řešení musí platit trojúhelníková nerovnost a-b < c a úhel alfa nesmí být "příliš" velký.)

Aleš Kobza

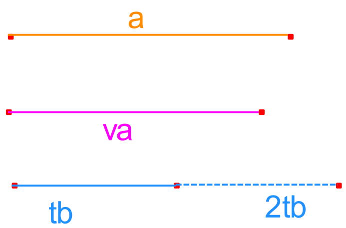
5. t_a, t_c, α

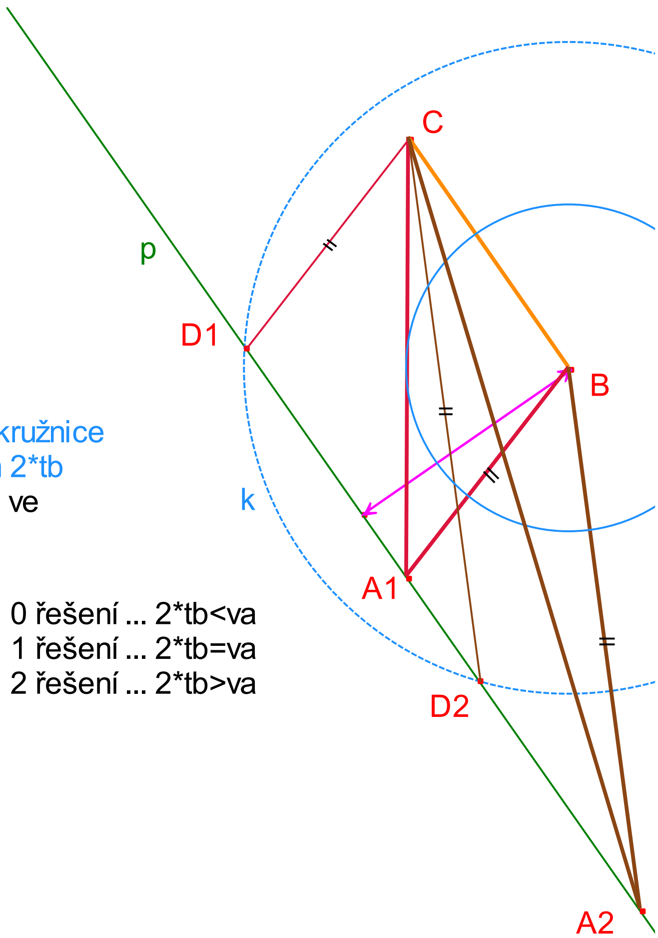


V trojúhelníku ASсC známe tři prvky: alfa, tc, I AT I = 2ta/3

Úloha má 0 - 2 řešení v závislosti na počtu průsečíků ekvigonály z níž vidíme CSc pod úhlem alfa a kružnice se středem v T a poloměrem 2ta/3.

6. a, v_a, t_b





Trojúhelník ABC doplňme na rovnoběžník ABCD, ve kterém pak platí I BD I = 2*tb.

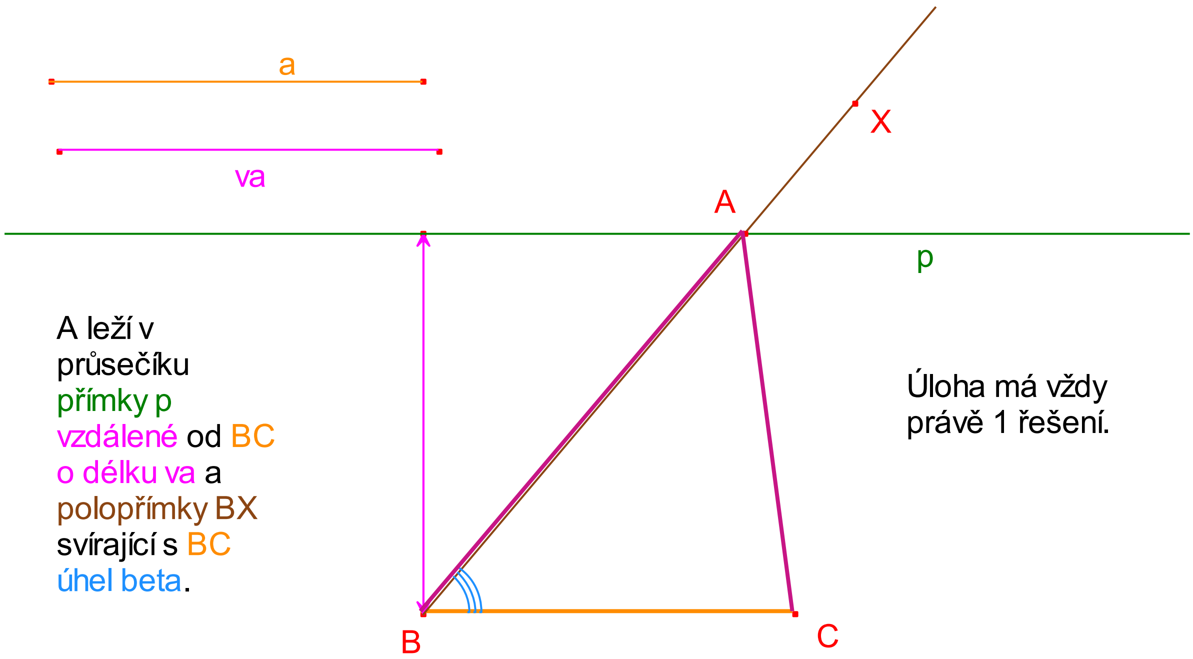
Bod D najdeme jako průsečík kružnice k se středem v B a poloměrem 2*tb s přímkou p rovnoběžnou s BC ve vzdálenosti va od BC.

Úloha má 0 - 2 řešení podle počtu průsečíků p a k.

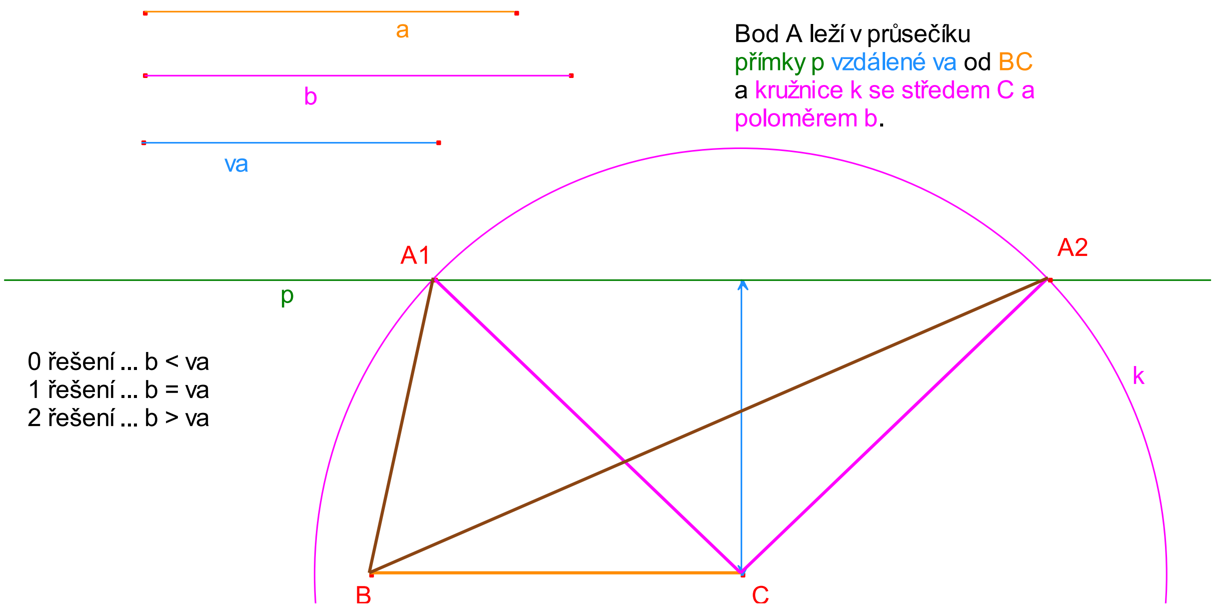
0 řešení ... 2*tb<va
1 řešení ... 2*tb=va
2 řešení ... 2*tb>va

Aleš Kobza

7. a, v_a, β


a
va
X
A
p
A leží v průsečíku přímky p vzdálené od BC o délku va a polopřímky BX svírající s BC úhel beta.
Úloha má vždy právě 1 řešení.
B
C

8. a, b, v_a


a
b
va
Bod A leží v průsečíku přímky p vzdálené va od BC a kružnice k se středem C a poloměrem b.
A1
A2
p
k
0 řešení ... b < va
1 řešení ... b = va
2 řešení ... b > va
B
C

9. c, t_b, v_b

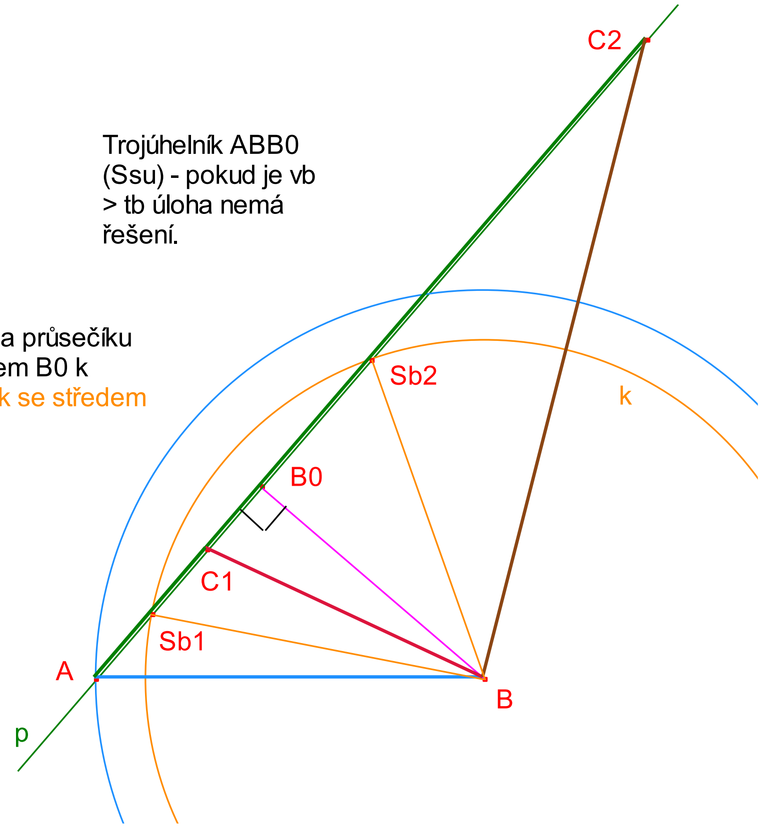
tb = 5,37 cm

vb = 4,66 cm

c = 6,16 cm

Trojúhelník ABB0 (Ssu) - pokud je vb > tb úloha nemá řešení.

Střed Sb strany b leží na průsečíku kolmice p vedené bodem B0 k úsečce BB0 s kružnicí k se středem B a poloměrem tb.



0 řešení ... vb > tb nebo vb > c, případně je-li vb = tb = c

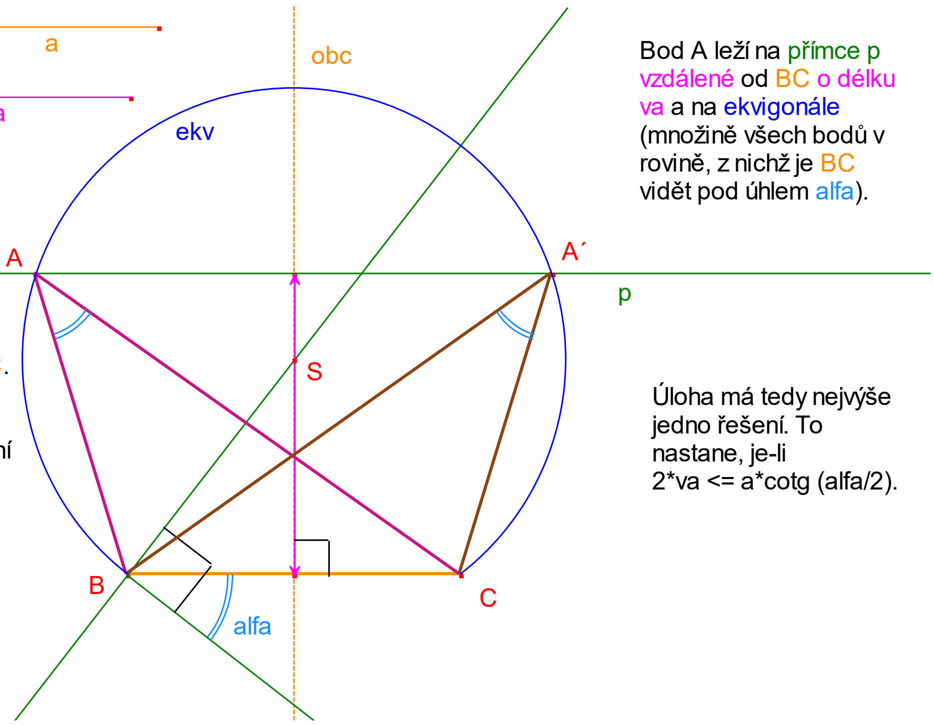
1 řešení ... tb > vb = c nebo c = tb > vb nebo c > tb = vb

2 řešení ... tb > vb a c > vb a délky tb a c jsou různé

10. a, v_a, α

a

va

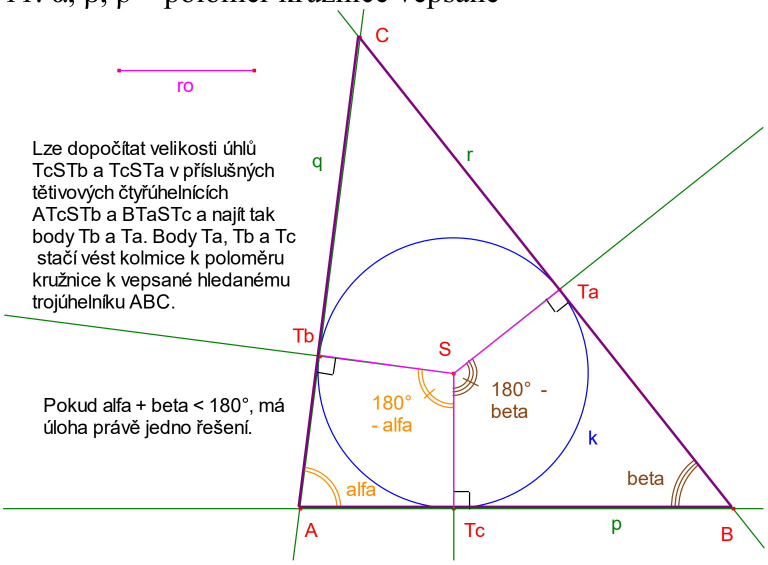


Bod A leží na přímce p vzdálené od BC o délku va a na ekvigonále (množině všech bodů v rovině, z nichž je BC vidět pod úhlem alfa).

Body A a A´ jsou osově souměrné podle osy BC. Oba zakreslené trojúhelníky ABC jsou tedy shodné. Jako řešení je počítáme pouze jedenkrát.

Úloha má tedy nejvýše jedno řešení. To nastane, je-li 2*va <= a*cotg (alfa/2).

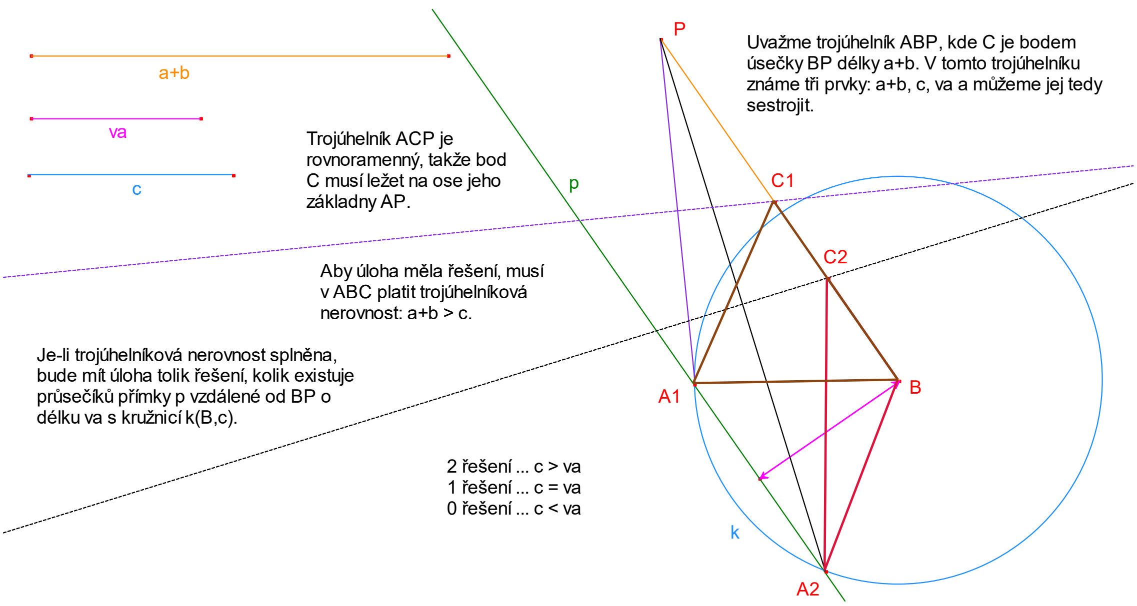
11. α, β, ρ – poloměr kružnice vepsané



Lze dopočítat velikosti úhlů TcSTb a TcSTa v příslušných tětivových čtyřúhelnících ATcSTb a BTaSTc a najít tak body Tb a Ta. Body Ta, Tb a Tc stačí vést kolmice k poloměru kružnice k vepsané hledanému trojúhelníku ABC.

Pokud alfa + beta < 180°, má úloha právě jedno řešení.

12. a+b, v_a, c



Uvažme trojúhelník ABP, kde C je bodem úsečky BP délky a+b. V tomto trojúhelníku známe tři prvky: a+b, c, va a můžeme jej tedy sestrojit.

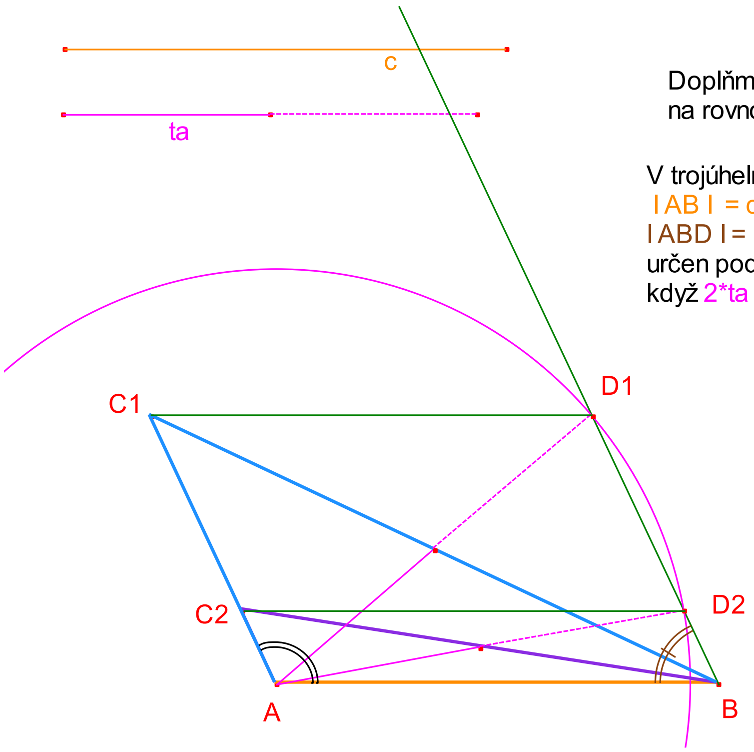
Trojúhelník ACP je rovnoramenný, takže bod C musí ležet na ose jeho základny AP.

Aby úloha měla řešení, musí v ABC platit trojúhelníková nerovnost: a+b > c.

Je-li trojúhelníková nerovnost splněna, bude mít úloha tolik řešení, kolik existuje průsečíků přímky p vzdálené od BP o délku va s kružnicí k(B,c).

2 řešení ... c > va
1 řešení ... c = va
0 řešení ... c < va

13. c, α, t_a



Doplňme trojúhelník ABC
na rovnoběžník ABDC.

V trojúhelníku ABD známe tři prvky:
I AB I = c, I AD I = 2*ta,
I ABD I = 180° - alfa. Jednoznačně
určen podle věty Ssu je však pouze,
když 2*ta > c.

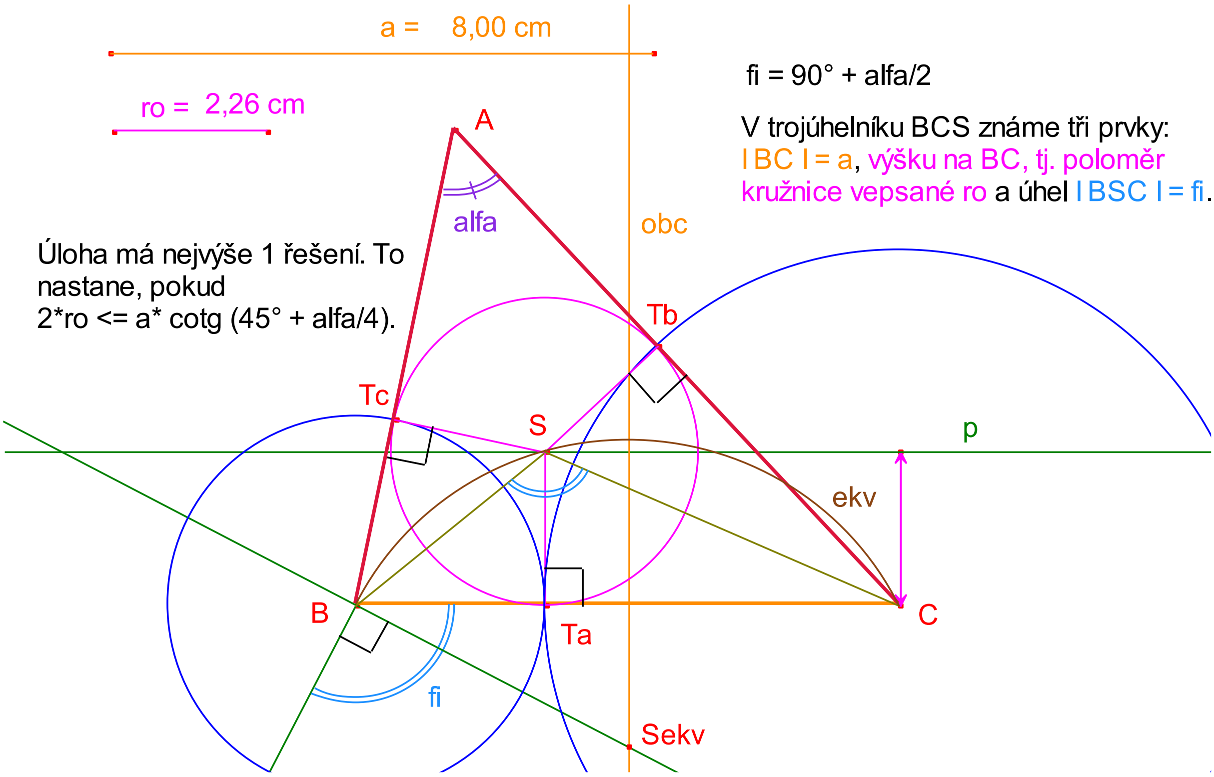
2 řešení ... c > 2*ta > c* sin (alfa)

1 řešení ... 2*ta = c* sin (alfa)
nebo
2*ta >= c

0 řešení ... c* sin (alfa) > 2*ta

Pozn. obecně platí:
sin (alfa) = sin (180° - alfa).

14. a, α, ρ – poloměr kružnice vepsané



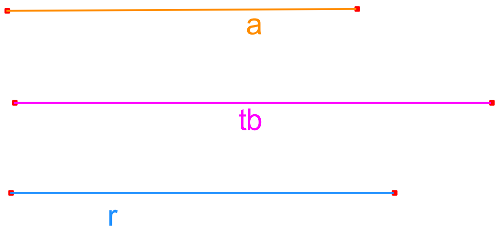
fi = 90° + alfa/2

V trojúhelníku BCS známe tři prvky:
I BC I = a, výšku na BC, tj. poloměr
kružnice vepsané ro a úhel I BSC I = fi.

Úloha má nejvýše 1 řešení. To
nastane, pokud
2*ro <= a* cotg (45° + alfa/4).

Aleš Kobza

15. a, t_b, r – poloměr kružnice opsané

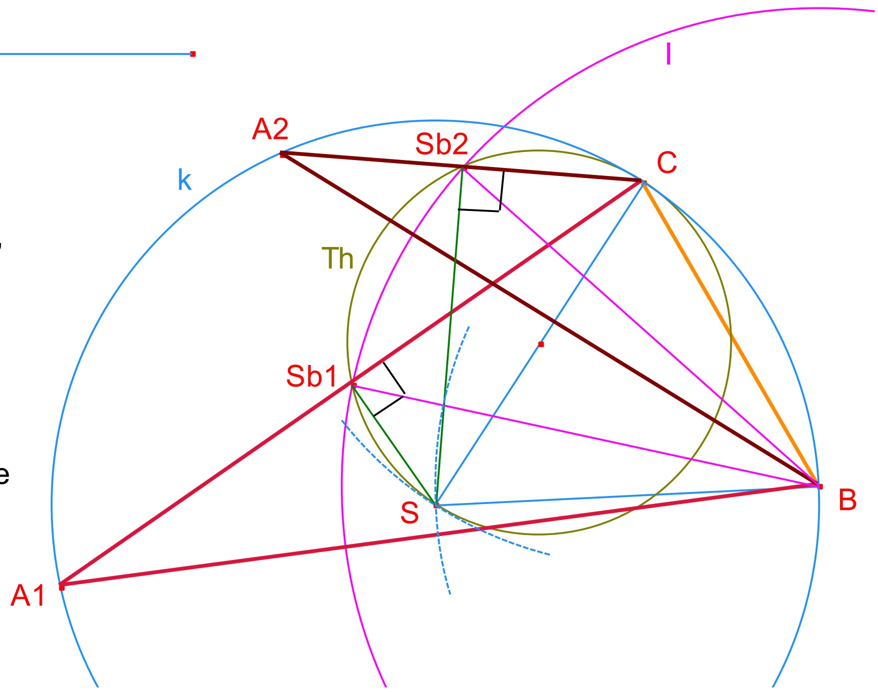


Trojúhelník BSC (sss)

Ze středu Sb tětivy AC kružnice k je úsečku SC vidět pod pravým úhlem, neboť osa této tětivy prochází středem S kružnice k.

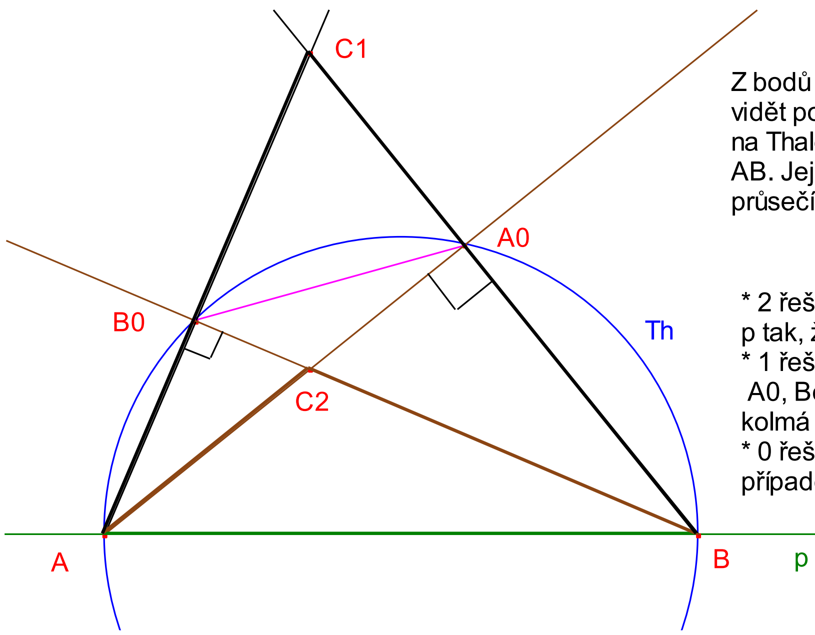
Bod Sb tedy leží jednak na Thaletově kružnici Th nad průměrem SC a dále na kružnici l(B,tb).

Úloha má 0 - 2 řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic l a Th.



B) Polohové úlohy

1. Dána přímka p a v téže polorovině s touto hraniční přímkou různé body A_0, B_0. Sestrojte trojúhelník ABC takový, aby AB ležela na p a body A_0 a B_0 byly patami výšek z vrcholů A a B.

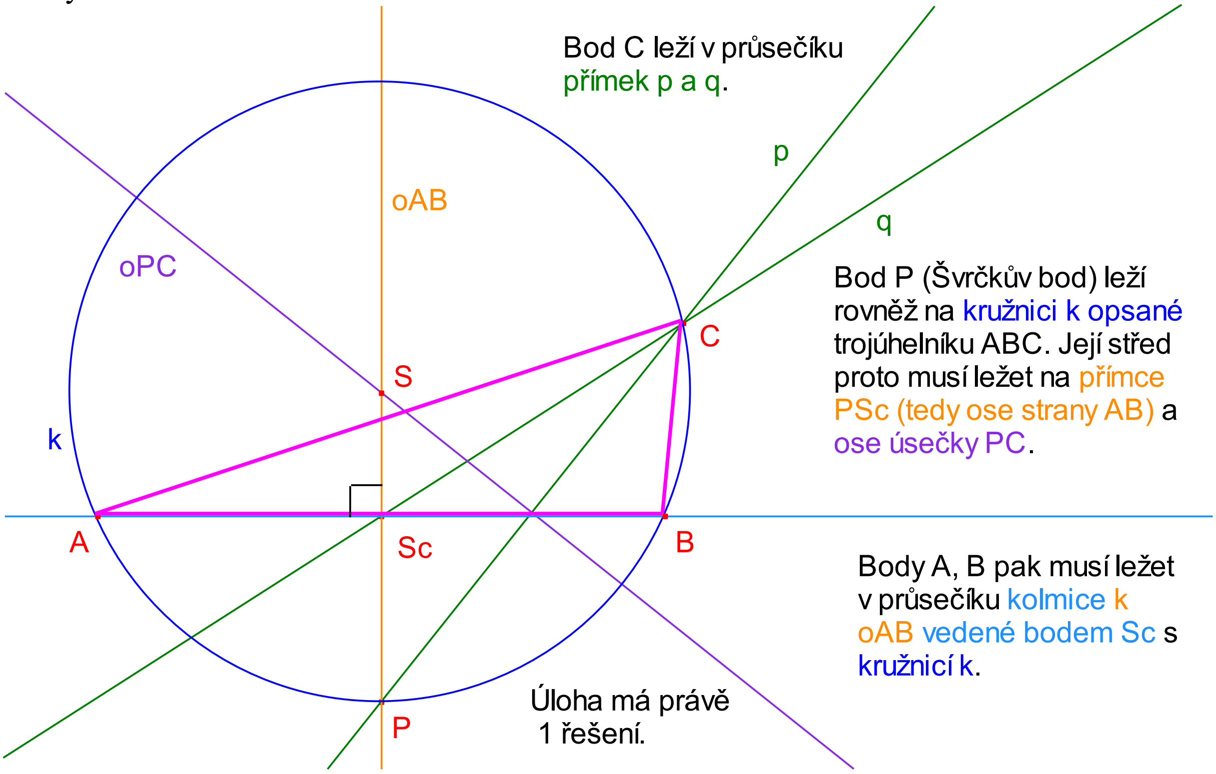


Z bodů A0 a B0 je úsečku AB vidět pod pravým úhlem, proto leží na Thaletově kružnici s průměrem AB. Její střed pak získáme jako průsečík osy A0B0 s přímkou p.

* 2 řešení... body A0, B0 mimo p tak, že A0B0 není na p kolmá
* 1 řešení ... právě jeden z bodů A0, Bo na p a A0B0 není kolmá na p
* 0 řešení ... v ostatních případech

Aleš Kobza

2. Jsou dány různoběžky p, q a body navzájem různé body P a S_c, které leží po řadě na přímkách p a q. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém těžnice t_c leží na přímce q, osa úhlu ACB leží na přímce p, bod S_c je středem strany AB a bodem P navíc prochází osa strany AB.



Bod C leží v průsečíku přímek p a q.

Bod P (Švrčkův bod) leží rovněž na kružnici k opsané trojúhelníku ABC. Její střed proto musí ležet na přímce PSc (tedy ose strany AB) a ose úsečky PC.

Body A, B pak musí ležet v průsečíku kolmice k oAB vedené bodem Sc s kružnicí k.

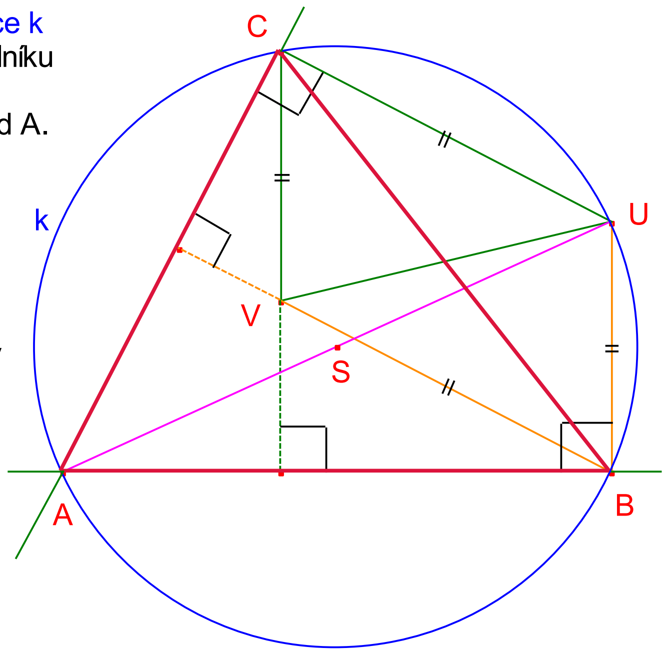
Úloha má právě 1 řešení.

3. Je dán trojúhelník CVU. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby V byl průsečík jeho výšek a úsečka AU tvořila průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Trojúhelník ABC je ostroúhlý, takže bod U musí být bodem toho oblouku kružnice k opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A.

Na základě vlastností výšek víme, že CV je kolmá k AB a také BV je kolmá k AC.

Obě úsečky CV a UB jsou tedy kolmé k AB a jsou proto vzájemně rovnoběžné. Podobně z kolmosti úseček BV a UC k AC vyplývá rovnoběžnost úseček BV a UC. Zjistili jsme tak, že BUCV je rovnoběžník.



Podle Thaletovy věty vidíme z B i C úsečku AU pod pravým úhlem.

Bod B tedy umíme sestrojit. Bod A pak najdeme v průsečíku kolmice vedené bodem B k CV a kolmice bodem C k BV.

Aleš Kobza